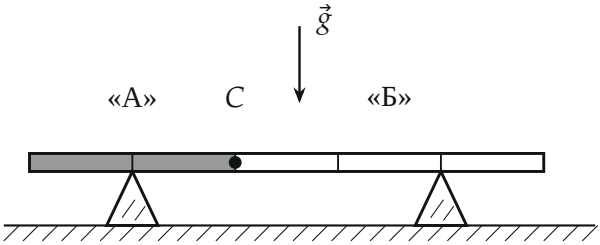
Стержень на двух опорах

Задача 5. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 10 класс, задача 5] «Стержень на двух опорах».

Если одно тело контактирует с другим по протяжённой поверхности, то воздействие первого тела на второе часто невозможно описать только равнодействующей всех элементарных сил в точках контакта. Помимо равнодействующей требуется учитывать ещё и суммарный момент этих элементарных сил. При рассмотрении воздействия одной части твёрдого тела на другую элементарные силы являются силами деформации, их в совокупности также можно заменить равнодействующей силой и вращающим моментом.

Однородный тонкий стержень массой $m = 10$ кг и длиной $l = 1$ м покоится горизонтально на двух опорах, как показано на рисунке. Стержень штрихами разделён на 5 частей одинаковой длины. Две левые части стержня, закрашенные на рисунке, назовём телом «А», а три другие части — телом «Б». Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Какова масса тела «А»? Дайте ответ в кг с округлением до десятых долей.
2. С какой силой $F_{\text{А}}$ тело «А» действует на левую опору? Дайте ответ в ньютонах с округлением до целого числа.
3. С какой силой $F_{\text{АБ}}$ тело «Б» действует на тело «А» в точке C их соприкосновения? Дайте ответ в ньютонах с округлением до целого числа.
4. Какой момент сил $M_{\text{АБ}}$ действует на тело «А» со стороны тела «Б»? Дайте ответ в Н·м с округлением до целого числа.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие твёрдого тела. Сначала весь стержень: две силы опор и сила тяжести, опоры стоят симметрично — делят вес пополам. Потом мысленно разрезаем стержень в точке C и рассматриваем часть «А» как отдельное тело. Чтобы «А» было в равновесии, часть «Б» должна действовать на него и силой, и моментом: именно так держится консольная часть балки. Условия равновесия для «А» — равенство нулю суммы сил и суммы моментов — дают и силу, и момент.

Обозначения. $l_0 = l/5 = 0{,}2$ м — длина одной части; N_1, N_2 — силы реакции левой и правой опор; ось y — вертикально вверх; моменты считаем положительными против часовой стрелки; $m_\text{А}$, $m_\text{Б}$ — массы частей.

1. Пункт 1: масса тела «А». Стержень однородный, масса пропорциональна длине; «А» — две части из пяти:

$$m_\text{А} = \frac{2}{5}m = 4{,}0 \text{ кг}, \qquad m_\text{Б} = \frac{3}{5}m = 6{,}0 \text{ кг}.$$

2. Пункт 2: силы опор. По рисунку левая опора стоит под первым штрихом ($x = l_0$ от левого конца), правая — под последним ($x = 4l_0$). Центр масс стержня — в середине, $x = 2{,}5l_0$, ровно посередине между опорами (рис. 1). Условие равновесия стержня — сумма моментов относительно центра масс равна нулю: $N_1 \cdot 1{,}5l_0 = N_2 \cdot 1{,}5l_0$, значит, $N_1 = N_2$. Сумма сил в проекции на y: $N_1 + N_2 - mg = 0$. Отсюда

$$N_1 = N_2 = \frac{mg}{2} = 50 \text{ Н}.$$

По третьему закону Ньютона тело «А» давит на левую опору с силой $F_\text{А} = N_1 = 50$ Н.

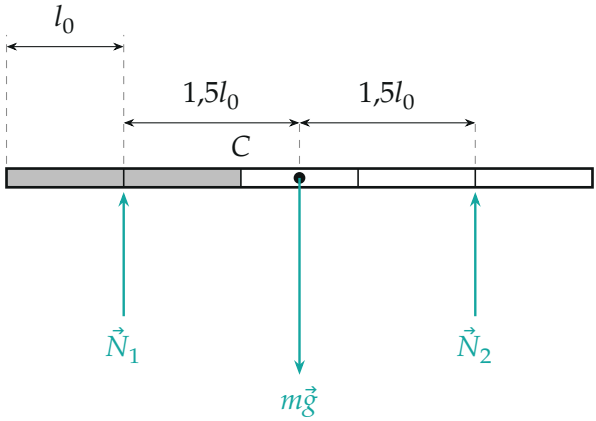


Рис. 1. Силы на весь стержень: опоры стоят симметрично относительно центра масс

3. Силы на тело «А». Мысленно отделим тело «А» (рис. 2). На него действуют:

- сила тяжести $m_А g = 40$ Н, приложенная в его середине, $x = l_0$;
- сила реакции левой опоры $N_1 = 50$ Н — тоже в точке $x = l_0$: опора стоит точно под серединой тела «А»;
- со стороны тела «Б» в сечении C ($x = 2l_0$) — сила $\vec{F}_{АБ}$ и момент $M_{АБ}$.

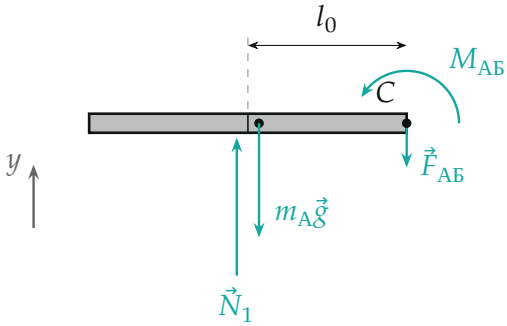


Рис. 2. Силы и момент, действующие на тело «А». Длины стрелок — по модулям: $N_1 = 50$ Н, $m_А g = 40$ Н, $F_{АБ} = 10$ Н

4. Пункт 3: сила со стороны «Б». Условие равновесия тела «А» — сумма сил в проекции на ось y равна нулю:

$$N_1 - m_A g + F_{АБ,y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{АБ,y} = m_A g - N_1 = 40 - 50 = -10 \text{ Н}.$$

Знак минус: сила направлена вниз. Модуль $F_{АБ} = \dfrac{mg}{2} - \dfrac{2}{5}mg = \dfrac{mg}{10} = 10$ Н. Смысл: опора даёт на 10 Н больше, чем весит «А», и этот избыток часть «Б» «прижимает» обратно — «А» поддерживает своим краем часть «Б».

5. Пункт 4: момент со стороны «Б». Условие равновесия «А» — сумма моментов относительно точки C равна нулю (сила $\vec{F}_{АБ}$ приложена в C и момента не даёт). Силы $\vec{N}_1$ и $m_A\vec{g}$ приложены на расстоянии l_0 левее C: сила вверх левее точки даёт вращение по часовой стрелке, вниз — против:

$$-N_1 l_0 + m_A g\, l_0 + M_{АБ} = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$M_{АБ} = (N_1 - m_A g)\, l_0 = \frac{mg}{10} \cdot \frac{l}{5} = \frac{mgl}{50} = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Знак плюс: момент направлен против часовой стрелки. Опора и тяжесть стремятся повернуть «А» по часовой стрелке (опора толкает сильнее), а «Б» удерживает его.

6. Проверка на теле «Б». По третьему закону Ньютона «А» действует на «Б» в точке C силой 10 Н вверх и моментом 2 Н·м по часовой стрелке. Для «Б»: силы $N_2 + 10 - m_Б g = 50 + 10 - 60 = 0$ — сходится. Моменты относительно C: опора на $2l_0$ правее C (против часовой, $+50 \cdot 0{,}4 = 20$), тяжесть «Б» на $1{,}5l_0$ правее (по часовой, $-60 \cdot 0{,}3 = -18$), момент от «А» (-2): $20 - 18 - 2 = 0$ — сходится (рис. 3).

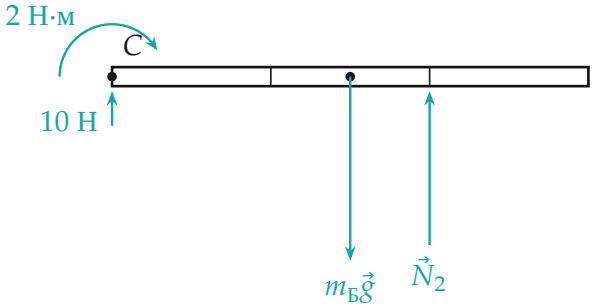


Рис. 3. Тело «Б»: со стороны «А» — сила 10 Н вверх и момент 2 Н·м по часовой стрелке (третий закон Ньютона)

7. Момент в любом сечении. Тем же способом можно разрезать стержень в любой точке x. Момент, с которым правая часть действует на левую, при $l_0 \le x \le 4l_0$:

$$M(x) = N_1(x - l_0) - \frac{mg}{l} \cdot \frac{x^2}{2} = 50(x - 0{,}2) - 50x^2 \ \ (\text{Н} \cdot \text{м},\ x \text{ в метрах}),$$

а за опорами — $M = -50x^2$ слева и симметрично справа. При $x = 0{,}4$ м получаем 2 Н·м — наш ответ (рис. 4).

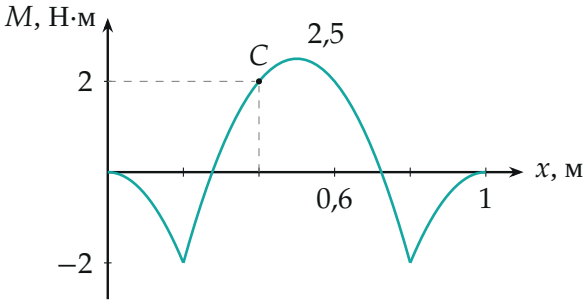


Рис. 4. Момент, передающийся через сечение стержня, в зависимости от положения сечения x (против часовой стрелки — плюс); опоры — при $x = 0{,}2$ и 0,8 м. В сечении C ($x = 0{,}4$ м) — 2 Н·м

Обратите внимание. Сила $F_{АБ}$ в точке C одна не может удержать «А»: относительно C у сил N_1 и $m_А g$ остаётся момент $(N_1 - m_А g)l_0 \ne 0$.

Его и компенсирует момент сил деформации со стороны «Б» — о нём предупреждает вступление к задаче.

Проверка. Размерность: $\dfrac{mgl}{50}$ — Н·м. Вторая проверка — тело «Б» (шаг 6) — сошлась и по силам, и по моментам.

Итог: разрезая тело мысленно, надо заменять отброшенную часть и силой, и моментом.

Ответ. 1) $m_{\text{А}} = 4{,}0$ кг; 2) $F_{\text{А}} = \dfrac{mg}{2} = 50$ Н; 3) $F_{\text{АБ}} = \dfrac{mg}{10} = 10$ Н (вниз); 4) $M_{\text{АБ}} = \dfrac{mgl}{50} = 2$ Н·м (против часовой стрелки).