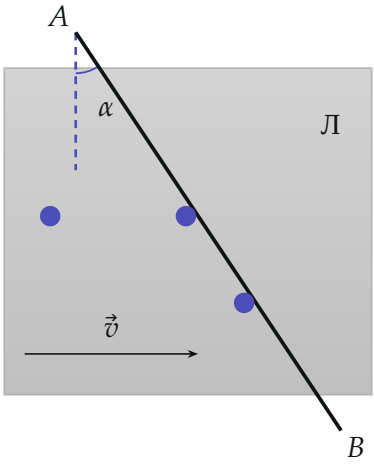
Конвейер и перекладина

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 11 класс, задача 2] «Конвейер и перекладина».

Для перемещения готовых изделий с ленты Л конвейера, движущегося горизонтально со скоростью $v = 1{,}5$ м/с, используется неподвижная горизонтальная направляющая перекладина AB, установленная чуть выше ленты и образующая угол α с перпендикуляром к направлению скорости ленты (на рис. вид сверху). Коэффициент трения изделий о ленту конвейера равен $\mu_1 = 0{,}40$, а о направляющую перекладину — $\mu_2 = 0{,}30$. Считайте, что движение деталей носит поступательный характер, то есть они не вращаются при трении о перекладину.



1. При каком минимальном угле $\alpha_{\min}$ изделия будут соскальзывать с ленты конвейера? Ответ дайте в градусах с точностью до целого числа.
2. Перекладину устанавливают под углом $\alpha = 30°$. Считая перекладину достаточно длинной, а ленту достаточно широкой, найдите установившуюся скорость u движения изделий вдоль неё. Ответ дайте в см/с с точностью до целого числа.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сухое трение и относительное движение. Лента всегда проскальзывает под изделием, прижатым

к перекладине, поэтому на изделие действует сила трения скольжения $\mu_1 mg$, направленная по скорости ленты *относительно изделия*. Эта сила одна делает два дела: прижимает изделие к перекладине (отсюда сила реакции N) и тянет его вдоль перекладины. Мешает трение о перекладину $\mu_2 N$. Пока изделие стоит, сила трения ленты направлена вдоль $\vec{v}$; когда изделие поехало, относительная скорость поворачивается, и вместе с ней поворачивается сила — так скорость u сама выходит на установившееся значение.

Обозначения. m — масса изделия; $\vec{F}_1$ — сила трения о ленту, $F_1 = \mu_1 mg$ (вертикально изделие в равновесии: реакция ленты равна mg); $\vec{N}$ — сила реакции перекладины; $\vec{F}_2$ — сила трения о перекладину; ось τ — вдоль перекладины от A к B, ось n — перпендикулярно ей, к перекладине; $\vec{u}$ — скорость изделия; $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u}$ — скорость ленты относительно изделия; β — угол между $\vec{v}_{\text{отн}}$ и осью n.

1. Пункт 1: силы на неподвижное изделие. Пусть изделие прижато к перекладине и стоит. Лента скользит под ним со скоростью $\vec{v}$, значит, сила трения ленты $F_1 = \mu_1 mg$ направлена вдоль $\vec{v}$. Перекладина образует угол α с перпендикуляром к $\vec{v}$, поэтому угол между $\vec{v}$ и нормалью n к перекладине тоже равен α (рис. 1).

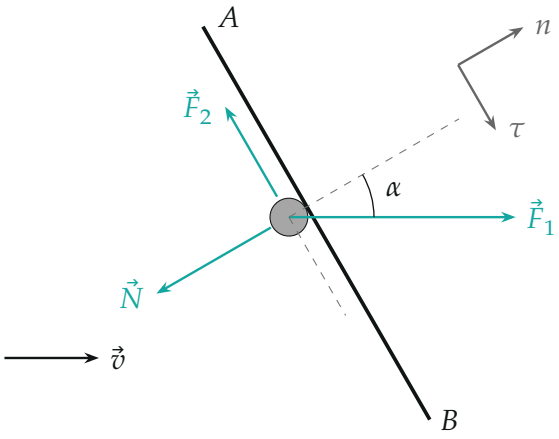


Рис. 1. Вид сверху. Неподвижное изделие: трение ленты $\vec{F}_1$ (вдоль $\vec{v}$) раскладываем на нормаль n и направление τ вдоль перекладины

2. Условие равновесия вдоль нормали. Второй закон Ньютона для изделия в проекции на ось n (изделие не движется поперёк перекладины):

$$F_1 \cos\alpha - N = 0 \quad \Longrightarrow \quad N = \mu_1 mg \cos\alpha.$$

3. Когда изделие сдвинется. В проекции на ось τ лента тянет изделие силой $F_1 \sin\alpha$, а сила трения о перекладину может достигать $\mu_2 N$. Изделие стоит, пока $F_1 \sin\alpha \le \mu_2 N$, и скользит, когда

$$\mu_1 mg \sin\alpha > \mu_2\, \mu_1 mg \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha > \mu_2.$$

Граница:

$$\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}\mu_2 = \operatorname{arctg} 0{,}30 = 16{,}7^\circ \approx 17^\circ.$$

Ответ не зависит от μ_1 (лишь бы $\mu_1 \neq 0$): сила F_1 входит и в «тянущую», и в «прижимающую» составляющую. Это как брусок на наклонной плоскости, который начинает скользить при $\operatorname{tg}\alpha = \mu$: роль силы тяжести здесь играет сила трения ленты.

4. Пункт 2: скорость ленты относительно изделия. При $\alpha = 30^\circ > \alpha_{\min}$ изделие скользит вдоль перекладины со скоростью $\vec{u}$. Сила трения скольжения направлена по скорости ленты *относительно изделия*:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u}.$$

Её проекции (рис. 2): на ось n — $v\cos\alpha$ (вектор $\vec{u}$ на n не проецируется), на ось τ — $v\sin\alpha - u$. Угол β между $\vec{v}_{\text{отн}}$ и нормалью:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v\sin\alpha - u}{v\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Чем быстрее едет изделие, тем меньше β: сила $\vec{F}_1$ поворачивается к нормали и тянет вдоль перекладины всё слабее.

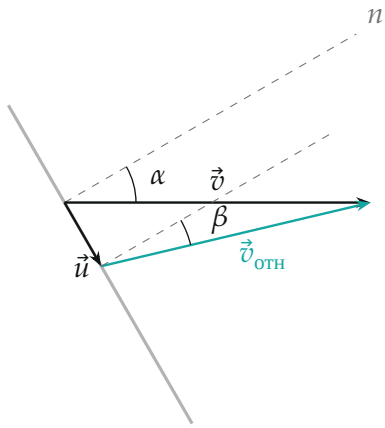


Рис. 2. Треугольник скоростей: $\vec{v}_{отн} = \vec{v} - \vec{u}$; угол β — между $\vec{v}_{отн}$ и нормалью n к перекладине (построено для $u = 0{,}36$ м/с)

5. Силы в установившемся режиме. Сила трения ленты $F_1 = \mu_1 mg$ направлена вдоль $\vec{v}_{отн}$, то есть под углом β к нормали (рис. 3). Второй закон Ньютона для изделия в проекциях:

$$n: \quad F_1 \cos\beta - N = 0, \qquad \tau: \quad F_1 \sin\beta - \mu_2 N = 0.$$

Вторая проекция равна нулю потому, что скорость установилась ($u = \text{const}$, ускорения нет). Подставим N из первого уравнения во второе:

$$F_1 \sin\beta = \mu_2 F_1 \cos\beta \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = \mu_2. \qquad (2)$$

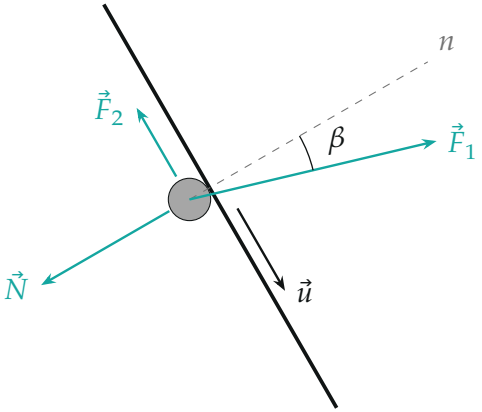


Рис. 3. Установившееся скольжение: сила $\vec{F}_1$ повёрнута к нормали на угол β, её проекция на перекладину уравновешена трением $\vec{F}_2 = \mu_2\vec{N}$

6. Установившаяся скорость. Приравняем (1) и (2):

$$\frac{v\sin\alpha - u}{v\cos\alpha} = \mu_2 \quad\Longrightarrow\quad u = v\,(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha).$$

Числа:

$$u = 1{,}5\cdot(0{,}500 - 0{,}30\cdot 0{,}866)\ \text{м/с} = 0{,}360\ \text{м/с} \approx 36\ \text{см/с}.$$

Знак плюс: изделие едет вдоль перекладины от A к B. Масса и μ_1 сократились: и тянущая, и прижимающая силы пропорциональны $\mu_1 mg$.

7. Зависимость от угла. Формула $u(\alpha) = v(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)$ обращается в нуль ровно при $\operatorname{tg}\alpha = \mu_2$ — это граница пункта 1. При $\alpha \to 90°$ (перекладина вдоль ленты) $u \to v$: изделие едет вместе с лентой (рис. 4).

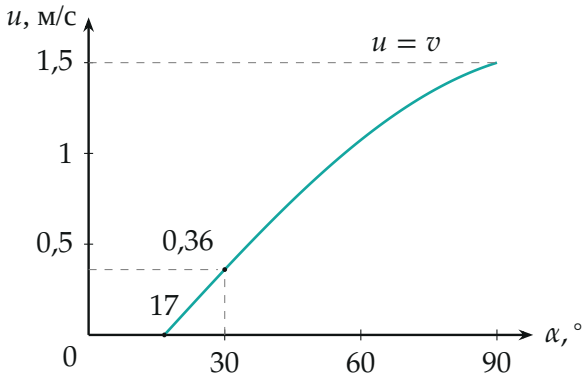


Рис. 4. Установившаяся скорость изделия в зависимости от угла установки перекладины ($v = 1{,}5$ м/с, $\mu_2 = 0{,}30$)

Обратите внимание. Сила трения о ленту направлена не по $\vec{v}$, а по скорости ленты *относительно изделия* $\vec{v} - \vec{u}$. Если оставить её вдоль $\vec{v}$, вдоль перекладины останется постоянная разность сил и изделие будет разгоняться неограниченно — установившейся скорости не выйдет.

Проверка. Размерность: $u = v\cdot(\ldots)$ — м/с. Пределы: $\alpha = \alpha_{\min}$ даёт $u = 0$ (переход к пункту 1), $\alpha = 90°$ даёт $u = v$. Второй способ прове-

рить (2): по треугольнику рис. 2 при $u = 0{,}36$ м/с $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{0{,}75 - 0{,}36}{1{,}299} = 0{,}30 = \mu_2$ — совпадает.

Итог: перекладина работает как «наклонная плоскость», где роль тяжести играет трение ленты; разгон останавливается, когда сила трения ленты поворачивается к нормали на угол трения $\operatorname{arctg}\mu_2$.

Ответ. 1) $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}\mu_2 \approx 17°$; 2) $u = v(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) \approx 36$ см/с.