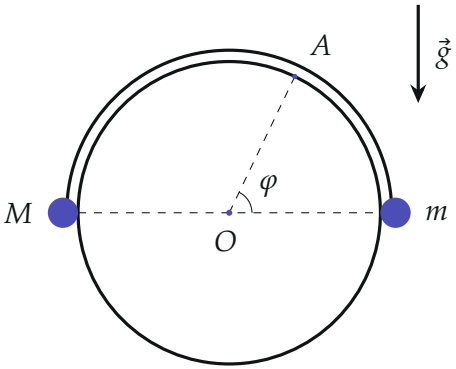
Шарики на цилиндре

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 11 класс, задача 3] «Шарики на цилиндре».

На гладкий горизонтально расположенный цилиндр радиусом $R = 1{,}3$ см накинута лёгкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два маленьких шарика массами m и M ($m < M$). В начальный момент шарики находятся на одном уровне с осью цилиндра (см. рис.). Нить с шариками начинает соскальзывать с цилиндра из состояния покоя. Когда угол между горизонталью и направлением от оси цилиндра на лёгкий шарик стал равен $\varphi = 1{,}0$ рад, лёгкий шарик перестал давить на цилиндр. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Определите отношение масс шариков M/m. Ответ дайте с точностью до сотых долей.
2. Какой угол φ' образует с горизонталью направление от оси цилиндра на лёгкий шарик в тот момент, когда сила давления лёгкого шарика на цилиндр максимальна? Ответ дайте в радианах с точностью до сотых долей.
3. Какова скорость v' лёгкого шарика при прохождении им положения, в котором он действует на цилиндр с максимальной силой? Ответ дайте в см/с с точностью до целого числа.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение по окружности с законом сохранения энергии. Тяжёлый шарик M висит на нити сбо-

ку и опускается вертикально, лёгкий шарик m поднимается по цилиндру. Нить нерастяжима и скользит по гладкому цилиндру — скорости шариков равны по модулю, а цилиндр работы не совершает, поэтому скорость найдём из энергии. Силу давления даст второй закон Ньютона для лёгкого шарика в проекции на радиус: часть силы тяжести, направленная к оси, тратится на центростремительное ускорение, остаток — давление на цилиндр. Оно сначала растёт (растёт $\sin\varphi$), потом падает (растёт скорость) и в точке отрыва обращается в нуль.

Обозначения. $k = M/m$; φ — текущий угол радиуса OA лёгкого шарика с горизонталью; v — скорость шариков; N — сила реакции цилиндра на лёгкий шарик (по третьему закону Ньютона равна силе давления); $\vec{T}$ — сила натяжения нити; $\varphi_0 = 1{,}0$ рад — угол отрыва из условия.

1. Скорость из закона сохранения энергии. Пока лёгкий шарик повернулся на угол φ, по цилиндру сползла дуга нити длиной $R\varphi$. Значит, тяжёлый шарик опустился на $R\varphi$, а лёгкий поднялся на $R\sin\varphi$ (рис. 1). Закон сохранения механической энергии системы «шарики + нить» (цилиндр гладкий, нить лёгкая и нерастяжима — трения нет, работа сил натяжения внутри системы в сумме равна нулю):

$$\frac{(m+M)v^2}{2} = MgR\varphi - mgR\sin\varphi \quad\Longrightarrow\quad v^2 = \frac{2gR\,(k\varphi - \sin\varphi)}{1+k}. \quad (1)$$

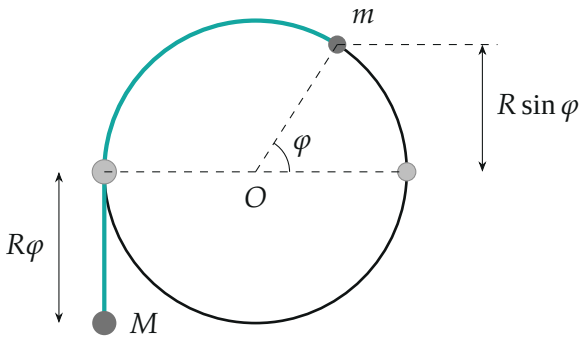


Рис. 1. Положение при повороте на угол φ (светлые кружки — начальное положение): M опустился на $R\varphi$, m поднялся на $R\sin\varphi$

2. Сила реакции цилиндра. Силы на лёгкий шарик (рис. 2): $m\vec{g}$ вниз, $\vec{N}$ от оси цилиндра, $\vec{T}$ — по касательной. Лёгкий шарик движется по окружности радиуса R со скоростью v. Второй закон Ньютона в проекции на ось r, направленную к оси цилиндра (сила натяжения на неё не проецируется):

$$mg\sin\varphi - N = \frac{mv^2}{R} \quad\Longrightarrow\quad N = mg\sin\varphi - \frac{mv^2}{R}.$$

Подставим v^2 из (1):

$$N(\varphi) = mg\left[\sin\varphi - \frac{2(k\varphi - \sin\varphi)}{1+k}\right] = mg\,\frac{(3+k)\sin\varphi - 2k\varphi}{1+k}. \quad (2)$$

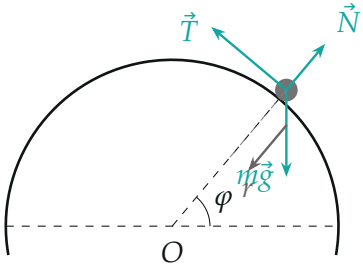


Рис. 2. Силы на лёгкий шарик; ось r — к оси цилиндра. Пунктир — проекция $mg\sin\varphi$ силы тяжести на радиус

3. Пункт 1: отрыв. Шарик перестаёт давить на цилиндр, когда $N = 0$. Из (2) при $\varphi = \varphi_0$:

$$(3+k)\sin\varphi_0 = 2k\varphi_0 \;\Rightarrow\; k = \frac{M}{m} = \frac{3\sin\varphi_0}{2\varphi_0 - \sin\varphi_0} = \frac{3\cdot 0{,}8415}{2 - 0{,}8415} \approx 2{,}18.$$

4. Пункт 2: максимум давления. Ищем максимум функции (2): производная по φ равна нулю,

$$\frac{dN}{d\varphi} = \frac{mg}{1+k}\left[(3+k)\cos\varphi - 2k\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad \cos\varphi' = \frac{2k}{3+k}.$$

При $\varphi < \varphi'$ производная положительна, при $\varphi > \varphi'$ — отрицательна, значит, это максимум. Подставим k из пункта 1: $2k = \dfrac{6\sin\varphi_0}{2\varphi_0 - \sin\varphi_0}$, $3 + k = \dfrac{6\varphi_0}{2\varphi_0 - \sin\varphi_0}$, и выражение упрощается:

$$\cos\varphi' = \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} = 0{,}8415 \quad \Longrightarrow \quad \varphi' = 0{,}5708 \text{ рад} \approx 0{,}57 \text{ рад}.$$

Совпадение $\cos\varphi' = \sin 1$ (то есть $\varphi' = \pi/2 - 1$) — случайность числа $\varphi_0 = 1$ рад. График $N(\varphi)$ — на рис. 3.

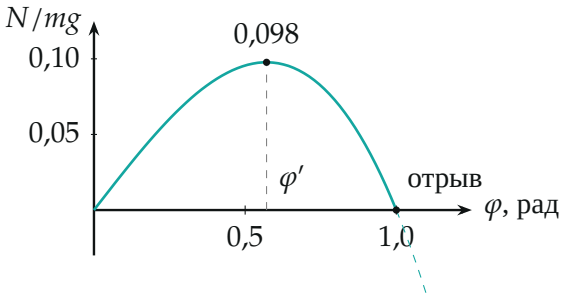


Рис. 3. Сила давления лёгкого шарика на цилиндр $N(\varphi)$ по формуле (2) при $k = 2{,}18$: максимум при $\varphi' = 0{,}57$ рад, нуль при $\varphi_0 = 1{,}0$ рад; пунктир — где формула уже неприменима

5. Пункт 3: скорость в точке максимума. Подставим φ' в (1):

$$v' = \sqrt{\frac{2gR\,(k\varphi' - \sin\varphi')}{1+k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 0{,}013\cdot(2{,}179\cdot 0{,}5708 - 0{,}5403)}{3{,}179}} \text{ м/с}$$
$$\approx 0{,}240 \text{ м/с} = 24 \text{ см/с}.$$

Обратите внимание. Тяжёлый шарик опускается не на $R\sin\varphi$, а на длину сползшей дуги $R\varphi$: он висит вертикально, и вся нить, ушедшая с цилиндра, оказывается под ним.

Проверка. Размерность (2): $mg\cdot$(безразмерное) — ньютоны. При $\varphi \to 0$: $N \to 0$ — в начале шарик сбоку цилиндра и не давит на него. Знак: при $k\varphi > \sin\varphi$ система действительно движется ($v^2 > 0$ при $k = 2{,}18$). Второй способ для v': в точке максимума $N' = 0{,}0977\,mg$, тогда из уравнения проекций $v'^2 = R\,(g\sin\varphi' - N'/m) = 0{,}013\cdot(5{,}403 - 0{,}977) = 0{,}0575$, $v' = 0{,}240$ м/с — то же.

Итог: давление лёгкого шарика определяется соревнованием двух вкладов — растущей проекции тяжести $mg\sin\varphi$ и растущей центростремительной «потребности» mv^2/R.

Ответ. 1) $\dfrac{M}{m} = \dfrac{3\sin\varphi}{2\varphi - \sin\varphi} \approx 2{,}18$; 2) $\cos\varphi' = \dfrac{2M/m}{3 + M/m}$, $\varphi' \approx 0{,}57$ рад; 3) $v' \approx 24$ см/с.