Пирамида Хеопса

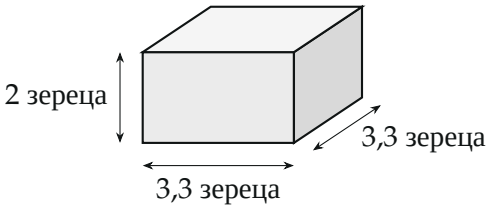
Задача 1. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 7 класс, задача 1] «Пирамида Хеопса».

Пирамида Хеопса — самая большая из египетских пирамид. Средний размер наблюдаемых каменных блоков черновой кладки — 3,3 зереца в глубину и ширину, 2 зерец в высоту. Конструкция пирамиды такая, что блоки уложены со сдвигом на половину блока по отношению к ряду, лежащему ниже. Длина сторон основания пирамиды — около 440 королевских локтей. Известно, что 1 королевский локоть равен 1,5 зереца, а 1 зерец равен 0,35 м.

1. Найдите количество блоков в основании пирамиды. Ответ дайте в тысячах штук с точностью до целого числа. (3 балла)
2. Рассчитайте высоту пирамиды. Ответ дайте в метрах с округлением до целого числа. (3 балла)

Мальчик Дима решил собрать модель пирамиды Хеопса из пластикового конструктора. Размер одной детали 2 см × 2 см × 0,8 см. Поняв, что дома ограниченное количество деталей, он сделал основание со стороной в 10 деталей.

3. Сколько деталей для строительства ему потребовалось? Дайте ответ в виде целого числа. (4 балла)



Поясняющий рисунок: блок черновой кладки 3,3 × 3,3 × 2 зереца

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на перевод единиц длины и счёт по геометрии кладки. Все размеры сначала переводим в одни единицы — в зерецы. Главная идея: сдвиг каждого ряда на полблока *с каждой стороны* делает сторону следующего ряда короче ровно на один блок. Значит, если в основании N блоков вдоль стороны, то рядов тоже

N (последний — один блок), и пирамида — стопка квадратов N^2, $(N-1)^2, \ldots, 1^2$.

Обозначения. a — сторона основания, $b = 3{,}3$ зереца — ширина блока, $c = 2$ зереца — высота блока; N — число блоков вдоль стороны основания.

1. Блоки в основании (пункт 1). Сторона основания в зерецах: $a = 440 \cdot 1{,}5 = 660$ зерецов. Вдоль стороны укладывается

$$N = \frac{a}{b} = \frac{660}{3{,}3} = 200 \text{ блоков},$$

а в квадратном основании $N \times N$:

$$N^2 = 200 \cdot 200 = 40\,000 \text{ блоков} = 40 \text{ тыс.}$$

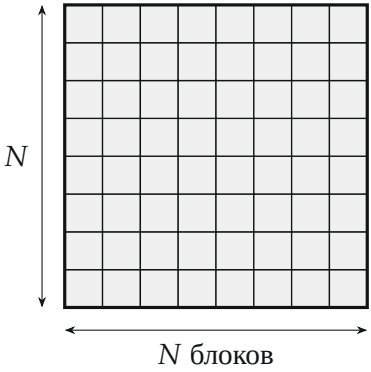


Рис. 2. Основание сверху (для наглядности $N = 8$; у пирамиды $N = 200$): квадрат $N \times N$ блоков

2. Высота (пункт 2). Ряд k (снизу, начиная с 1) сдвинут относительно нижнего на $\frac{1}{2}b$ с каждой стороны, поэтому его сторона на b короче — на один блок (рис. 3). В ряду k вдоль стороны $N-k+1$ блоков, и последний, N-й ряд — один блок. Рядов $N = 200$, каждый высотой $c = 2$ зереца:

$$h = Nc = 200 \cdot 2 = 400 \text{ зерецов} = 400 \cdot 0{,}35 \text{ м} = 140 \text{ м}.$$

Это близко к настоящей высоте пирамиды (≈ 146 м с разрушенной вершиной), так что модель кладки разумная.

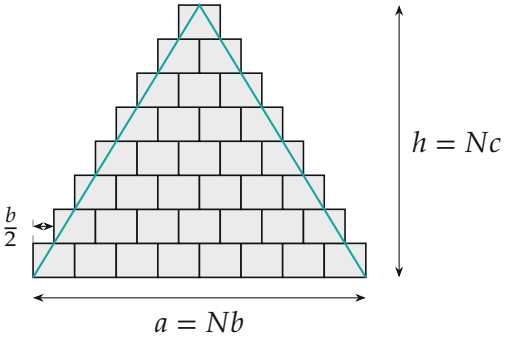


Рис. 3. Разрез пирамиды (для наглядности $N = 8$): каждый ряд сдвинут на полблока с каждой стороны и короче нижнего на один блок; рядов столько же, сколько блоков в стороне основания

3. Модель Димы (пункт 3). Модель устроена так же: деталь — квадрат 2×2 см в плане, сдвиг на половину детали. Основание — 10×10 деталей, каждый следующий ряд на одну деталь короче вдоль каждой стороны: 9×9, 8×8, …, 1×1. Всего деталей

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385.$$

Второй способ — формула суммы квадратов, тот же ответ:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385.$$

Модель высотой $10 \cdot 0{,}8 = 8$ см при стороне 20 см.

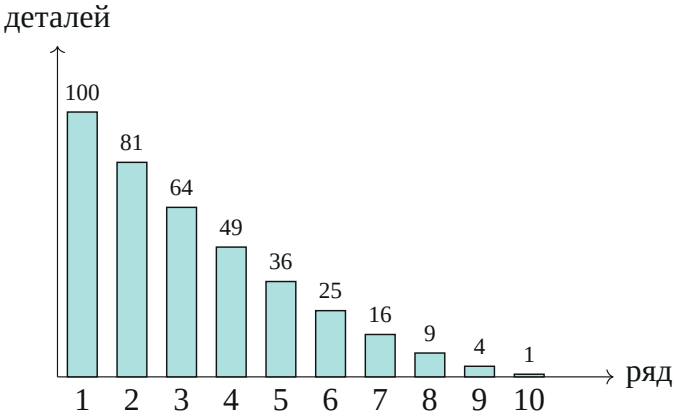


Рис. 4. Число деталей в рядах модели снизу вверх: $100, 81, \ldots, 1$*; в сумме* 385

Обратите внимание. Сдвиг на полблока — с *каждой* стороны, поэтому ряд короче на целый блок, а не на половину. Если бы сторона уменьшалась на полблока, рядов было бы $2N$, и высота вышла бы вдвое больше.

Соберём ответ. $N = \dfrac{440 \cdot 1{,}5}{3{,}3} = 200$, блоков в основании $N^2 = 40$ тыс.; $h = 2N \cdot 0{,}35$ м $= 140$ м; деталей $\sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 385$.

Проверка. Единицы: N безразмерно (зерецы на зерецы), h в метрах. Склон пирамиды: на каждый ряд высотой 2 зереца сторона отступает на 1,65 зереца, наклон $\operatorname{arctg}(2/1{,}65) \approx 50°$ — близко к настоящим $\approx 52°$. Малый пример: при основании 2×2 получилось бы $4 + 1 = 5$ деталей — формула суммы даёт $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$.

Смысл: ступенчатая пирамида — стопка квадратов, сторона которых убывает на единицу; число рядов равно числу блоков в стороне основания.

Ответ. 1) 40 тыс. блоков; 2) 140 м; 3) 385 деталей.