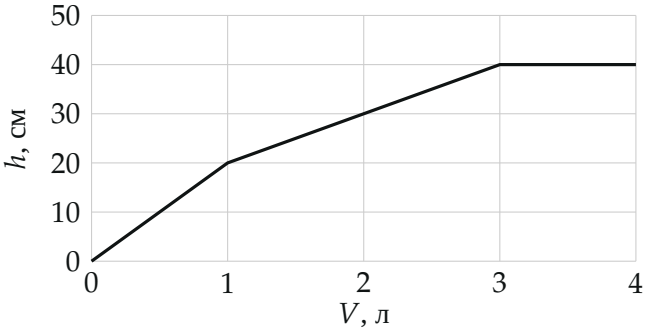
Песок и вода

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 7 класс, задача 2] «Песок и вода».

В цилиндрическом сосуде находится песок массой $m = 3$ кг. Площадь основания сосуда $S = 100\,\text{см}^2$. Сосуд медленно наполнили водой. Зависимость высоты уровня воды h в сосуде от налитого объёма V представлена на рисунке. Плотность воды 1 г/см^3.



1. Найдите насыпную плотность песка. Ответ дайте в г/см^3 с округлением до десятых долей.
2. Найдите плотность песчинок. Ответ дайте в г/см^3 с округлением до десятых долей.
3. Найдите среднюю плотность содержимого заполненного сосуда. Ответ дайте в г/см^3 с округлением до десятых долей.
4. На сколько опустится уровень воды в заполненном сосуде, если убрать из него весь песок? Ответ дайте в см с округлением до десятых долей.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плотность и чтение графика. Песок насыпан слоем, между песчинками — пустоты (поры). Пока вода не поднялась выше песка, она заполняет только поры, и уровень растёт быстро: на каждый литр приходится лишь часть объёма слоя. Когда песок покрыт, вода заполняет всё сечение сосуда, и уровень растёт медленнее. Когда сосуд полон, лишняя вода переливается, и уровень больше не меняется. Каждому излому графика соответствует своя смена режима — по ним и найдём все объёмы.

Обозначения. $h_п$ — высота слоя песка; $V_{сл} = Sh_п$ — объём слоя (песчинки вместе с порами); $V_{пор}$ — объём пор; $V_ч$ — объём самих песчинок; H — высота сосуда; $\rho_в = 1\,г/см^3$.

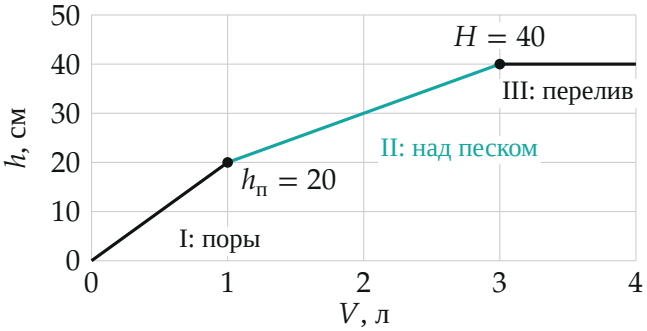


Рис. 1. Три участка графика: I — вода заполняет поры слоя песка, II — вода над песком, III — сосуд полон

1. Читаем график. Первый излом — точка (1 л; 20 см): здесь вода дошла до верха песка. Значит, $h_п = 20\,см$, а поры слоя вмещают $V_{пор} = 1\,л = 1000\,см^3$. Второй излом — (3 л; 40 см): сосуд полон, $H = 40\,см$, всего в сосуде 3 л воды. Проверка участка II: над песком 2 л подняли уровень на 20 см, то есть $2000\,см^3/20\,см = 100\,см^2$ — это и есть S, график согласован с условием.

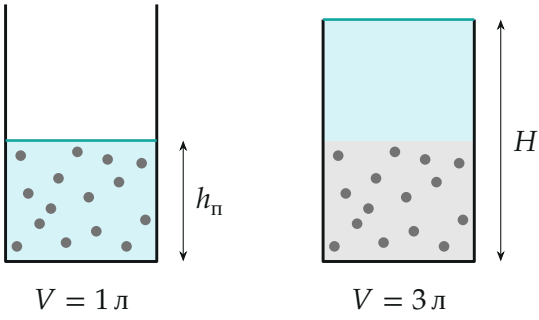


Рис. 2. Слева — вода только что покрыла песок (поры заполнены); справа — сосуд полон до края

2. Насыпная плотность — масса песка, делённая на объём всего слоя вместе с порами:

$$\rho_{\text{н}} = \frac{m}{Sh_{\text{п}}} = \frac{3000\ \text{г}}{100\ \text{см}^2 \cdot 20\ \text{см}} = 1{,}5\ \text{г/см}^3.$$

3. Плотность песчинок — масса, делённая на объём самих песчинок. Объём слоя складывается из песчинок и пор:

$$V_{\text{ч}} = Sh_{\text{п}} - V_{\text{пор}} = 2000 - 1000 = 1000\ \text{см}^3,$$

$$\rho_{\text{ч}} = \frac{m}{V_{\text{ч}}} = \frac{3000\ \text{г}}{1000\ \text{см}^3} = 3{,}0\ \text{г/см}^3.$$

4. Средняя плотность содержимого полного сосуда — вся масса, делённая на весь объём SH. Масса воды: $3\ \text{л} \cdot 1\ \text{г/см}^3 = 3000\ \text{г}$. Тогда

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m + \rho_{\text{в}} V_{\text{в}}}{SH} = \frac{3000 + 3000}{100 \cdot 40}\ \text{г/см}^3 = 1{,}5\ \text{г/см}^3.$$

Второй способ: объём сосуда $4000\ \text{см}^3$ = песчинки 1000 + вода 3000 — сходится, пустот не осталось.

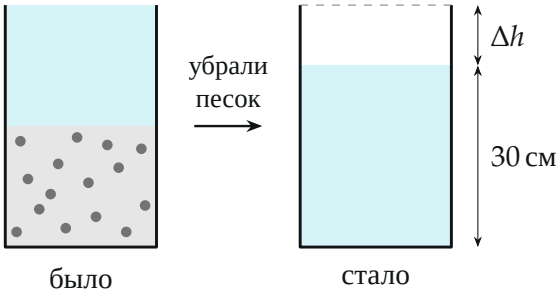


Рис. 3. Без песка те же 3 л воды занимают 30 см высоты: уровень опускается на объём песчинок, делённый на S

5. Уровень без песка. Вода остаётся та же, $3000\ \text{см}^3$; без песчинок она занимает высоту $3000/100 = 30\ \text{см}$. Уровень опускается на

$$\Delta h = \frac{V_{\text{ч}}}{S} = \frac{1000\ \text{см}^3}{100\ \text{см}^2} = 10{,}0\ \text{см}.$$

Обратите внимание. Насыпная плотность и плотность песчинок — разные величины: в первой масса делится на объём слоя вместе с порами, во второй — только на объём зёрен. Поэтому насыпная плотность всегда меньше.

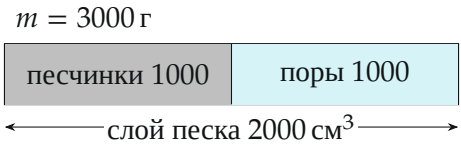


Рис. 4. Состав слоя песка: половина объёма — зёрна, половина — поры; отсюда $\rho_ч = 2\rho_н$

Проверка. Размерности: г/см^3 и см. Плотность зёрен 3,0 г/см^3 близка к плотности кварца (2,6 г/см^3) — правдоподобно. Ответ п. 3 вторым способом: $(3000 + 3000)/(1000 + 3000) = 1{,}5$ г/см^3 — совпадает.

Смысл: изломы графика — моменты смены режима, и по ним видно, сколько места в слое занимают поры.

Ответ. 1) $\rho_н = 1{,}5$ г/см^3; 2) $\rho_ч = 3{,}0$ г/см^3; 3) $\rho_{ср} = 1{,}5$ г/см^3; 4) $\Delta h = 10{,}0$ см.