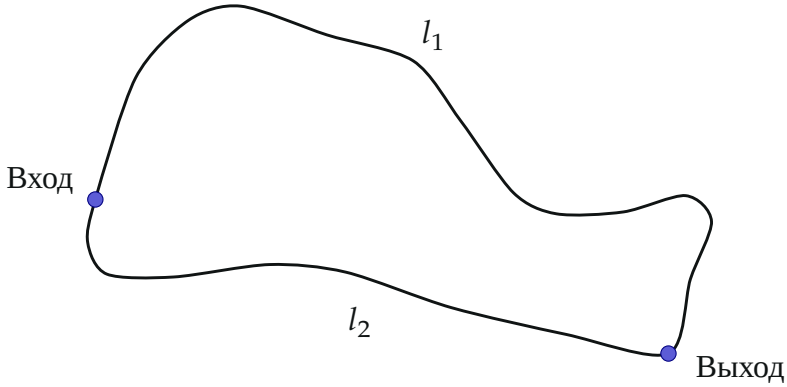
Чабаны и овцы

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 8 класс, задача 1] «Чабаны и овцы».

В горной Балкарии огромные стада овец, коров и других животных всё лето проводят на свободном выпасе. Но с наступлением осени пастухи-чабаны гонят стада вниз. Два чабана, Иса и Умар, гонят отару овец уже несколько дней, и вот они достигли места, где дорога разветвляется на два разных ущелья. Чабаны решили разделиться, а после прохождения сложного участка встретиться и обсудить оптимальный маршрут для оставшегося стада. Они разделили стадо на две части и пустили вперёд себя, а сами позже поехали верхом на лошадях параллельно стаду. Иса поехал по левому ущелью, а Умар — по правому. Оказалось, что левое ущелье длиннее ($l_1 = 5$ км) и сложно проходимо, по нему овцы могут двигаться со скоростью $v_1 = 2$ км/ч, а правое — короче ($l_2 = 2$ км), и двигаться по нему овцы могут со скоростью $v_2 = 5$ км/ч. Овцы идут в ущельях на равных расстояниях друг от друга (в двух ущельях эти расстояния разные). Чабаны перемещаются на лошадях и поэтому могут ехать по любому ущелью со скоростью $v = 10$ км/ч.



1. Найдите, сколько минут Умар ждал Ису после прохождения ущелья. Округлите до целого числа. (2 балла)

По дороге вниз чабаны по старой привычке считали овец (овца подсчитывается, когда чабан проезжает мимо неё). Умар насчитал $n_2 = 25$

овец, а Иса — $n_1 = 80$. Считайте, что очередные овцы зашли в ущелья сразу после чабанов, а последних посчитанных овец чабаны встретили в самом конце ущелий. Встретившись, пастухи на основе полученных данных рассчитали две важные величины, которые помогли им решить, как действовать дальше. Определите их и вы.

2. Сколько овец единовременно находится в ущельях? (3 балла)
3. Определите, сколько овец проходит через оба ущелья суммарно за 1 час. (4 балла)

После встречи Умар поехал назад по ущелью длиной l_2, чтобы спустить всех оставшихся овец.

4. Сколько овец встретил Умар на обратной дороге? Считайте, что Умар въезжает в ущелье сразу после выхода очередной овцы, а последнюю подсчитанную овцу встречает у другого конца ущелья. (3 балла)

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение и «поток» одинаковых объектов. Чабан обгоняет цепочку овец, идущих с одинаковыми интервалами, поэтому число встреченных овец определяется не скоростью чабана, а скоростью *относительно овец*: в системе отсчёта овец они стоят, а чабан едет вдоль неподвижной цепочки. Отсюда находим расстояние между овцами, а по нему — сколько их в ущелье и сколько проходит за час. Навстречу овцам чабан едет с суммой скоростей и встречает их чаще.

Обозначения. Индекс $i = 1$ — левое ущелье (Иса), $i = 2$ — правое (Умар); Δl_i — расстояние между соседними овцами; t_i — время проезда чабана по ущелью; N_i — число овец, одновременно находящихся в ущелье; q_i — число овец, выходящих из ущелья за час.

1. Время ожидания (пункт 1). Чабаны выехали одновременно и едут равномерно со скоростью v:

$$t_1 = \frac{l_1}{v} = \frac{5}{10}\ \text{ч} = 30\ \text{мин}, \qquad t_2 = \frac{l_2}{v} = \frac{2}{10}\ \text{ч} = 12\ \text{мин},$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l_1 - l_2}{v} = 18\ \text{мин}.$$

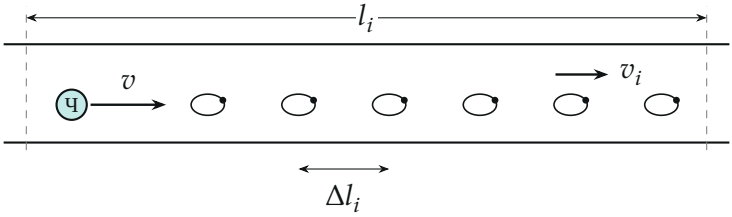


Рис. 2. Чабан (Ч) догоняет цепочку овец: все овцы идут со скоростью v_i на расстоянии Δl_i друг от друга, чабан — со скоростью v

2. Расстояние между овцами. Перейдём в систему отсчёта овец: в ней они стоят на расстоянии Δl_i, а чабан едет со скоростью $v - v_i$ (закон сложения скоростей). За время $t_i = l_i/v$ он проходит мимо цепочки путь $(v - v_i)t_i$ и минует по одной овце на каждый отрезок Δl_i:

$$n_i = \frac{(v - v_i)t_i}{\Delta l_i} = \frac{(v - v_i)\, l_i}{v\, \Delta l_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_i = \frac{(v - v_i)\, l_i}{v\, n_i}.$$

Правое ущелье: $\Delta l_2 = \dfrac{5 \cdot 2}{10 \cdot 25} = 0{,}04$ км $= 40$ м; левое: $\Delta l_1 = \dfrac{8 \cdot 5}{10 \cdot 80} = 0{,}05$ км $= 50$ м.

3. Овцы в ущельях (пункт 2). В ущелье длиной l_i с шагом Δl_i помещается

$$N_i = \frac{l_i}{\Delta l_i} = \frac{n_i v}{v - v_i}: \qquad N_2 = \frac{25 \cdot 10}{5} = 50, \qquad N_1 = \frac{80 \cdot 10}{8} = 100,$$

всего $N = N_1 + N_2 = 150$ овец. Чабан насчитал меньше, чем было в ущелье, потому что овцы, пока он едет, уходят вперёд: из $N_2 = 50$ он догнал только $n_2 = 25$.

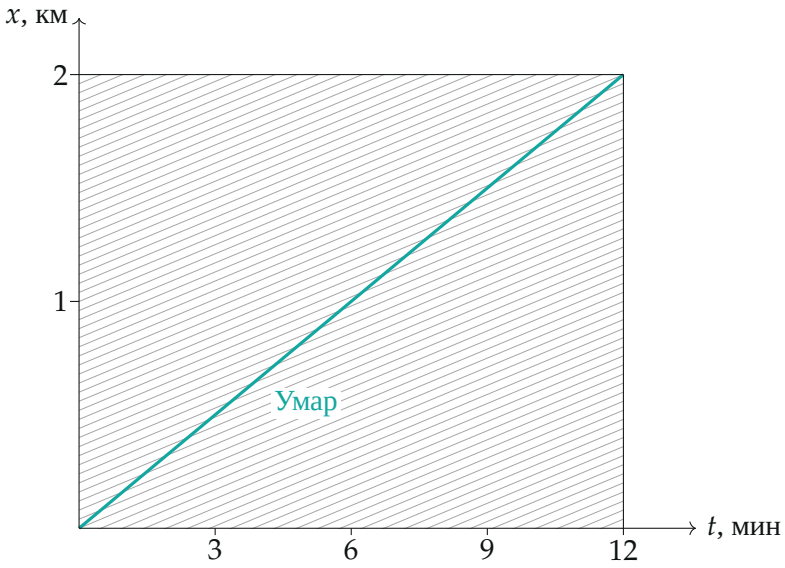


Рис. 3. Графики $x(t)$ в правом ущелье: серые прямые — овцы (наклон v_2, шаг 40 м), бирюзовая — Умар (наклон v); пересечений 25, хотя в ущелье одновременно 50 овец

4. Поток овец (пункт 3). Овцы идут со скоростью v_i, через выход ущелья за час проходит отрезок цепочки длиной $v_i \cdot 1$ ч, на нём $v_i \cdot 1\text{ ч}/\Delta l_i$ овец:

$$q_i = \frac{v_i}{\Delta l_i} = \frac{N_i v_i}{l_i}:$$

$$q_2 = \frac{5}{0{,}04} = 125 \text{ овец/ч}, \qquad q_1 = \frac{2}{0{,}05} = 40 \text{ овец/ч},$$

суммарно $q = q_1 + q_2 = 165$ овец в час. Правое ущелье пропускает втрое больше — это и есть «важная величина» для выбора маршрута.

5. Обратная дорога (пункт 4). Теперь Умар едет навстречу овцам: в системе отсчёта овец его скорость $v + v_2$. Время проезда то же, $t_2 = l_2/v$, а цепочка та же (шаг Δl_2):

$$n_2' = \frac{(v + v_2)t_2}{\Delta l_2} = N_2 \frac{v + v_2}{v} = n_2 \frac{v + v_2}{v - v_2} = 25 \cdot \frac{15}{5} = 75 \text{ овец}.$$

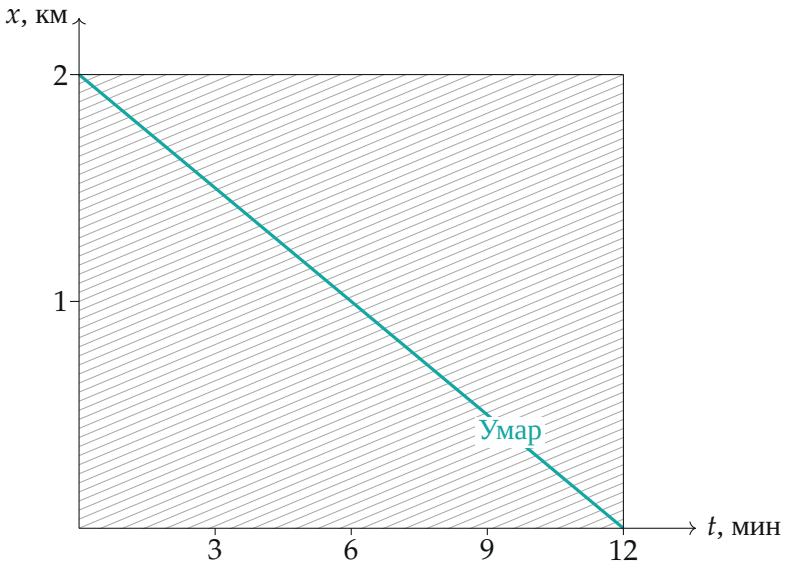


Рис. 4. Обратная дорога Умара (время от въезда в ущелье): навстречу овцам он пересекает 75 прямых — в три раза больше, чем по пути вниз

Обратите внимание. Число посчитанных овец n_i — не число овец в ущелье: пока чабан едет, цепочка уходит вперёд (по пути) или набегает (навстречу). Считать надо в системе отсчёта овец.

Соберём ответ.

$$\Delta t = \frac{l_1 - l_2}{v}, \qquad N = \frac{n_1 v}{v - v_1} + \frac{n_2 v}{v - v_2},$$

$$q = \frac{n_1 v v_1}{l_1 (v - v_1)} + \frac{n_2 v v_2}{l_2 (v - v_2)}, \qquad n_2' = n_2 \frac{v + v_2}{v - v_2}.$$

Проверка. N и n_2' безразмерны, $[q] = \dfrac{\text{км/ч}}{\text{км}} = \text{ч}^{-1}$. Предел: стоящие овцы ($v_i \to 0$) — чабан насчитает всех, $N_i = n_i$, и туда и обратно одинаково, $n_2' = n_2$. Второй способ для q_2: каждая овца проходит ущелье за $l_2/v_2 = 0{,}4$ ч, в ущелье их 50, за час выходит $50/0{,}4 = 125$ — сходится.

Смысл: считать объекты в движущемся потоке — значит перейти в его систему отсчёта.

Ответ. 1) $\Delta t = 18$ мин; 2) $N = 150$ овец; 3) $q = 165$ овец в час; 4) $n_2' = 75$ овец.