Удочка и нарты

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 8 класс, задача 3] «Удочка и нарты».

Чукотский мальчик Кэску отправился на рыбалку. Он использует лёгкую удочку длиной $l = 1{,}2$ м: один конец удочки Кэску упирает ногой в лёд, а на расстоянии $x = 0{,}2$ м от этого конца он держит удочку рукой. На втором конце удочки висит рыба массой $m_р = 2$ кг. Изгибом удочки можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

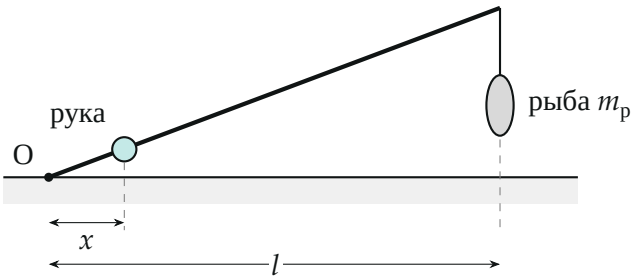
1. С какой вертикальной силой Кэску нужно удерживать удочку рукой, чтобы она оставалась в равновесии? Ответ дайте в ньютонах, округлите до целого числа. (2 балла)

После успешной рыбалки Кэску перевозит рыбу на нартах по льду. Масса пустых нарт $m_н = 30$ кг, общая площадь полозьев $S = 0{,}15$ м^2.

2. Какое давление оказывают пустые нарты на лёд? Ответ дайте в кПа, округлите до десятых долей. (1 балл)
3. Какую максимальную массу рыбы можно погрузить на нарты, чтобы они не ушли под лёд толщиной $h_л = 10$ см, если он выдерживает максимальное давление $P_{max} = 8$ кПа? Ответ дайте в килограммах, округлите до целого числа. (2 балла)

По весне толщина льда может быть сильно неоднородной даже на одном водоёме. Известно, что максимальное давление, которое выдерживает лёд, прямо пропорционально квадрату его толщины.

4. Какой должна быть минимальная толщина льда, чтобы на него могли заехать пустые нарты? Ответ дайте в сантиметрах, округлив до десятых долей. (3 балла)



Поясняющий рисунок: удочка упирается в лёд в точке O, рука держит её на расстоянии x от O, рыба висит на конце (расстояния x и l отложены вдоль удочки; на рисунке показаны их горизонтальные проекции, см. п. 1)

▲ **Решение. Что происходит.** Первая часть — равновесие рычага: удочка опирается на лёд, поэтому удобно взять моменты относительно точки упора — сила реакции льда (неизвестная по величине и направлению) тогда не войдёт в уравнение. Рука ближе к опоре, чем рыба, значит, держать приходится силой больше веса рыбы — рычаг проигрывает в силе. Вторая часть — давление $P = F/S$: нарты давят на лёд силой тяжести, распределённой по площади полозьев; предел нагрузки задаёт $P_{\max}$, а зависимость $P_{\max} \propto h^2$ даёт минимальную толщину.

Обозначения. O — точка упора удочки в лёд; α — угол удочки с горизонтом; F — сила руки; N — реакция льда в точке O; P_0 — давление пустых нарт; m — предельная масса рыбы на нартах; $h_{\min}$ — минимальная толщина льда.

1. Сила руки (пункт 1). На удочку действуют: вес рыбы $m_{\text{р}}g$ (через леску, вниз, на конце), сила руки F (вертикально вверх, на расстоянии x от O) и реакция льда N в точке O; сама удочка лёгкая. Правило моментов относительно оси через O: момент N равен нулю (плечо ноль). Плечо вертикальной силы — горизонтальное расстояние до O: у руки $x\cos\alpha$, у рыбы $l\cos\alpha$ (рис. 2):

$$F \cdot x\cos\alpha = m_{\text{р}}g \cdot l\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F = \frac{m_{\text{р}}gl}{x} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1{,}2}{0{,}2} = 120\ \text{Н}.$$

$\cos\alpha$ сократился — ответ не зависит от наклона удочки. Сила руки в $l/x = 6$ раз больше веса рыбы (20 Н). Реакция льда направлена вниз: $N = F - m_{\text{р}}g = 100$ Н (из равенства нулю суммы сил) — нога прижимает удочку ко льду.

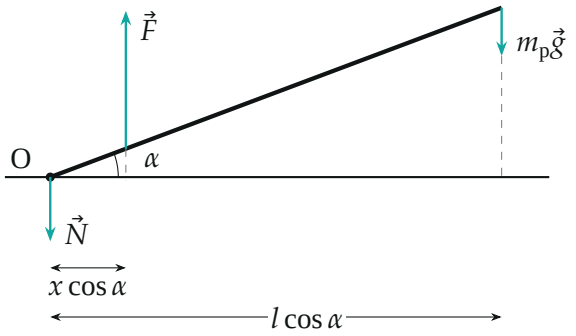


Рис. 2. Силы, действующие на удочку: $\vec{F}$ руки, $m_р\vec{g}$ рыбы, $\vec{N}$ льда; плечи вертикальных сил относительно O — горизонтальные проекции $x\cos\alpha$ и $l\cos\alpha$

2. Давление пустых нарт (пункт 2). Нарты стоят на льду, по второму закону Ньютона в проекции на вертикаль сила давления равна силе тяжести $m_н g = 300$ Н; она распределена по площади полозьев:

$$P_0 = \frac{m_н g}{S} = \frac{300}{0{,}15} = 2000\ \text{Па} = 2{,}0\ \text{кПа}.$$

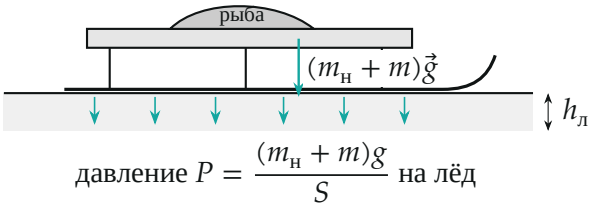


Рис. 3. Нарты на льду: сила тяжести нарт с грузом распределена по площади полозьев S

3. Предельный груз (пункт 3). Нарты с рыбой массы m давят с силой $(m_н + m)g$; предел — когда давление равно P_{max}:

$$\frac{(m_н + m)g}{S} = P_{max},$$

$$m = \frac{P_{max}S}{g} - m_н = \frac{8000 \cdot 0{,}15}{10} - 30 = 120 - 30 = 90\ \text{кг}.$$

4. Минимальная толщина (пункт 4). По условию $P_{\max} = kh^2$, где k — одна и та же постоянная для льда водоёма. Для льда $h_л = 10$ см известно $P_{\max} = 8$ кПа, отсюда $k = P_{\max}/h_л^2$. Пустые нарты не проваливаются, пока $kh^2 \geqslant P_0$; минимальная толщина — при равенстве. Поделим одно уравнение на другое (постоянная k сокращается):

$$\frac{P_0}{P_{\max}} = \left(\frac{h_{\min}}{h_л}\right)^2,$$

$$h_{\min} = h_л\sqrt{\frac{P_0}{P_{\max}}} = 10\text{ см}\cdot\sqrt{\frac{2}{8}} = 5{,}0\text{ см}.$$

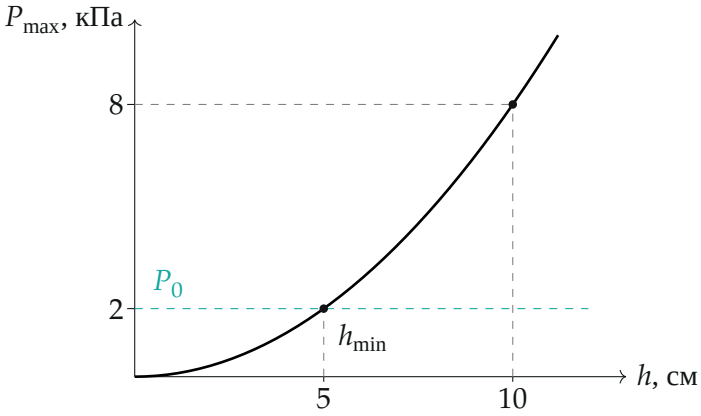


Рис. 4. Предельное давление льда $P_{\max} = kh^2$ (по точке $h = 10$ см, 8 кПа): уровень $P_0 = 2$ кПа достигается при $h_{\min} = 5$ см

Обратите внимание. В пункте 1 плечо силы — расстояние от оси до *линии действия* силы, а не расстояние вдоль удочки; здесь наклон сокращается, потому что обе силы вертикальны. В пункте 4 давление уменьшилось вчетверо, а толщина — только вдвое: зависимость квадратичная.

Соберём ответ.

$$F = \frac{m_р g l}{x}, \qquad P_0 = \frac{m_н g}{S},$$

$$m = \frac{P_{\max} S}{g} - m_{\text{н}}, \qquad h_{\min} = h_{\text{л}} \sqrt{\frac{m_{\text{н}} g}{P_{\max} S}}.$$

Проверка. Размерности: $[mgl/x] = \text{Н}$, $[mg/S] = \text{Па}$, $[PS/g] = \text{кг}$. Предел $x \to l$ (рука у рыбы): $F \to m_{\text{р}} g$ — держим просто вес. Второй способ для пункта 3: при 90 кг рыбы общая сила 1200 Н, давление $1200/0{,}15 = 8000$ Па $= P_{\max}$ — верно.

Смысл: рычаг упором в лёд выигрывает в перемещении конца удочки, но проигрывает в силе в l/x раз; а прочность льда растёт с толщиной быстрее, чем линейно.

Ответ. 1) $F = 120$ Н; 2) $P_0 = 2{,}0$ кПа; 3) $m = 90$ кг; 4) $h_{\min} = 5{,}0$ см.