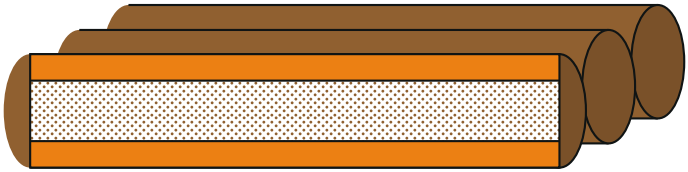
Чёлн из брёвен

Задача 4. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 8 класс, задача 4] «Чёлн из брёвен».

Удмуртская девочка Лемпи помогает дедушке перевозить по реке чёлн (лодку), собранный из трёх связанных пустотелых брёвен, закрытых лёгкими тонкими крышками. Каждое бревно имеет форму полого цилиндра длиной $H = 2$ м, внешним диаметром $D = 30$ см и внутренним диаметром $d = 16$ см. В середине одного бревна дедушка устроил тайник, в который Лемпи положила мешок с зерном массой $m = 20$ кг.



Плотность древесины $\rho_д = 520$ кг/м^3. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Найдите массу одного пустотелого бревна. Ответ дайте в килограммах, округлите до десятых долей. (2 балла)
2. Какова средняя плотность пустого чёлна? Ответ дайте в кг/м^3, округлите до целого числа. (2 балла)
3. Какая часть объёма чёлна, гружённого зерном, находится под водой? Ответ дайте в процентах, округлите до целого числа. (3 балла)
4. В процессе перевозки одно из брёвен без зерна треснуло, поэтому его заменили на найденное бревно такого же размера, но без внутренней полости. На сколько после этой замены изменилась сила Архимеда, действующая на чёлн? Ответ дайте в ньютонах, округлите до целого числа. (2 балла)

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плотность и условие плавания. Масса бревна — масса древесины, то есть кольца в сечении, а объём, который чёлн вытесняет, — внешний объём брёвен (полость закрыта крышками, вода туда не попадает). Чёлн плавает, поэтому сила

Архимеда равна полной силе тяжести; отсюда объём под водой, а при замене бревна — изменение силы Архимеда без расчёта осадки.

Обозначения. $V_д$ — объём древесины одного бревна; $V = \dfrac{\pi D^2}{4} H$ — внешний объём бревна; $m_б$ — масса бревна; $\rho_ч$ — средняя плотность пустого чёлна; $V_п$ — объём погружённой части; F_A — сила Архимеда.

1. Масса бревна (пункт 1). Сечение бревна — кольцо: круг диаметра D без круга диаметра d (рис. 2). Объём древесины — площадь кольца на длину:

$$V_д = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} H = \frac{\pi(0{,}09 - 0{,}0256)}{4} \cdot 2 \approx 0{,}1012 \text{ м}^3,$$

$$m_б = \rho_д V_д = 520 \cdot 0{,}1012 \approx 52{,}6 \text{ кг}.$$

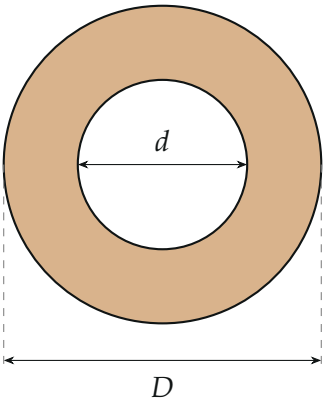


Рис. 2. Сечение бревна (D = 30 см, d = 16 см): древесина — кольцо между окружностями D и d, внутри — закрытая полость

2. Средняя плотность пустого чёлна (пункт 2). Средняя плотность — полная масса, делённая на весь занимаемый объём (вместе с полостями):

$$\rho_ч = \frac{3m_б}{3V} = \rho_д \frac{D^2 - d^2}{D^2} = 520 \cdot \frac{0{,}0644}{0{,}09} \approx 372 \text{ кг/м}^3.$$

Это меньше $\rho_в$ — пустой чёлн плавает с большим запасом.

3. Объём под водой (пункт 3). Чёлн с зерном плавает, значит по первому закону Ньютона сила Архимеда уравновешивает силу тяжести (рис. 3):

$$\rho_в g V_п = (3m_б + m)g \quad \Rightarrow \quad V_п = \frac{3m_б + m}{\rho_в} = \frac{157{,}8 + 20}{1000} \approx 0{,}178\ \text{м}^3.$$

Внешний объём чёлна $3V = 3 \cdot \dfrac{\pi \cdot 0{,}09}{4} \cdot 2 \approx 0{,}424\ \text{м}^3$, доля под водой

$$\frac{V_п}{3V} = \frac{3m_б + m}{3\rho_в V} \approx \frac{0{,}178}{0{,}424} \approx 0{,}42 = 42\,\%.$$

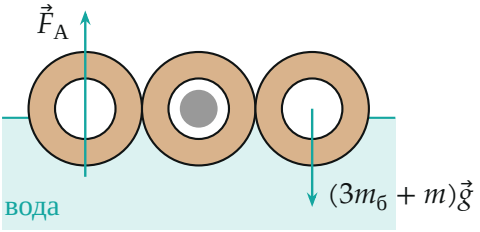


Рис. 3. Гружёный чёлн в разрезе (зерно — в среднем бревне): сила Архимеда равна силе тяжести, под водой ≈ 42 % объёма

4. Замена бревна (пункт 4). Сплошное бревно того же размера тяжелее пустотелого на массу древесины в объёме полости:

$$\Delta m = \rho_д \frac{\pi d^2}{4} H = 520 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}0256}{4} \cdot 2 \approx 20{,}9\ \text{кг}.$$

Проверим, что чёлн по-прежнему плавает: масса $157{,}8 + 20 + 20{,}9 \approx 199$ кг, а предельная (всё под водой) $\rho_в \cdot 3V \approx 424$ кг — плавает (под водой $\approx 47\,\%$). Значит, сила Архимеда снова равна силе тяжести и выросла на столько же, на сколько сила тяжести:

$$\Delta F_A = \Delta m\, g = \rho_д g \frac{\pi d^2}{4} H \approx 209\ \text{Н}.$$

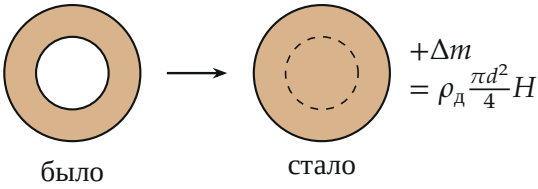


Рис. 4. Замена треснувшего бревна сплошным: добавляется древесина в объёме бывшей полости

Обратите внимание. Полость закрыта крышками и сухая, поэтому вытесняет воду весь внешний объём бревна — и в средней плотности, и в условии плавания объём берётся внешний.

Соберём ответ.

$$m_б = \rho_д \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} H, \qquad \rho_ч = \rho_д \frac{D^2 - d^2}{D^2},$$

$$\frac{V_п}{3V} = \frac{3m_б + m}{3\rho_в V}, \qquad \Delta F_A = \rho_д g \frac{\pi d^2}{4} H.$$

Проверка. Размерности: $[\rho D^2 H] = $ кг, $[\rho g d^2 H] = $ Н, доля безразмерна. Пределы: при $d \to 0$ средняя плотность $\to \rho_д$, при $d \to D$ — к нулю. Второй способ для пункта 3: без зерна доля под водой была бы $\rho_ч/\rho_в = 37\,\%$, зерно добавляет $20/424 \approx 5\,\%$ — итого 42 %.

Смысл: плавающее тело «отвечает» на любую добавку массы ровно такой же добавкой силы Архимеда.

Ответ. 1) $m_б \approx 52{,}6$ кг; 2) $\rho_ч \approx 372$ кг/м^3; 3) 42 %; 4) сила Архимеда увеличилась на ≈ 209 Н.