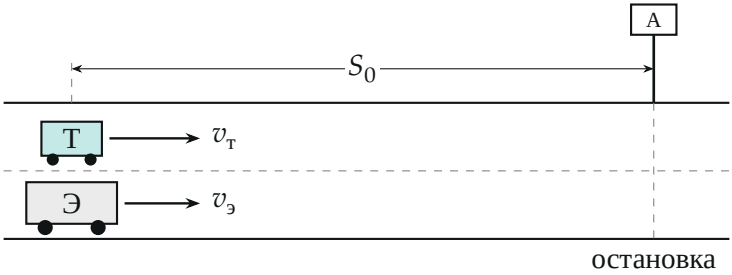
Электробус и такси

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 9 класс, задача 1] «Электробус и такси».

Электробус, движущийся по улице, начинает тормозить с постоянным ускорением, когда до ближайшей остановки остаётся проехать расстояние S_0. В этот момент его обгоняет автомобиль такси, движущийся равномерно со скоростью $v_т$. Электробус прибыл на остановку спустя время t после того, как мимо неё проследовало такси. Размерами транспортных средств и протяжённостью остановки можно пренебречь.

Вариант	S_0, м	$v_т$, км/ч	t, с
1	300	72	25
2	500	60	70
3	375	54	75
4	125	75	14
5	256	64	17,6

1. С какой скоростью $v_э$ двигался электробус непосредственно перед началом торможения? Дайте ответ в км/ч с округлением до целого числа.
2. С каким по модулю ускорением a происходило торможение электробуса? Дайте ответ в м/с^2 с округлением до тысячных долей.
3. Какая скорость v была у электробуса в момент времени, когда автомобиль такси проезжал мимо остановки? Дайте ответ в км/ч с округлением до целого числа.
4. На какое расстояние S автомобиль такси обогнал электробус к моменту, когда машина такси проезжала мимо остановки? Дайте ответ в метрах с округлением до целого числа.



Поясняющий рисунок: в момент начала торможения электробуса (Э) его обгоняет такси (Т); до остановки А — расстояние S_0

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равнопеременное движение с остановкой в конце пути. Главная идея: электробус тормозит *до нуля* ровно на остановке, поэтому его движение удобно «прокрутить назад во времени» от остановки — тогда это разгон из покоя, и путь за последние τ секунд равен $a\tau^2/2$. Время до остановки у электробуса больше, чем у такси, на известное t, а время такси находим сразу: оно едет равномерно.

Обозначения. Ось x — вдоль дороги по движению, начало — в точке обгона, момент обгона — 0. $t_т$ — время такси до остановки, $t_э$ — время торможения электробуса до остановки, a — модуль его ускорения (проекция $a_x = -a$).

1. Время такси и время электробуса. Такси едет равномерно, поэтому $t_т = S_0/v_т$. Электробус приходит к остановке на t позже:

$$t_э = t_т + t = \frac{S_0}{v_т} + t.$$

Вариант 1: $v_т = 72$ км/ч $= 20$ м/с, $t_т = 300/20 = 15$ с, $t_э = 15 + 25 = 40$ с.

2. Ускорение (пункт 2). Уравнение движения электробуса в проекции на ось x: $x(\tau) = v_э\tau - \dfrac{a\tau^2}{2}$, скорость $v_x(\tau) = v_э - a\tau$. В момент $t_э$ он на остановке и стоит:

$$v_э - at_э = 0, \qquad v_э t_э - \frac{at_э^2}{2} = S_0.$$

Подставим $v_э = at_э$ из первого во второе: $S_0 = \dfrac{at_э^2}{2}$ — это и есть «разгон из покоя назад во времени». Отсюда

$$a = \frac{2S_0}{t_э^2} = \frac{2S_0}{(S_0/v_т + t)^2} = \frac{2 \cdot 300}{40^2} = 0{,}375 \text{ м/с}^2.$$

3. Начальная скорость (пункт 1). Из условия остановки

$$v_э = at_э = \frac{2S_0}{t_э} = \frac{2S_0}{S_0/v_т + t} = \frac{600}{40} = 15 \text{ м/с} = 54 \text{ км/ч}.$$

Второй способ: при равнозамедленном движении средняя скорость равна полусумме начальной и конечной, $S_0/t_э = (v_э + 0)/2$, — то же $v_э = 2S_0/t_э$.

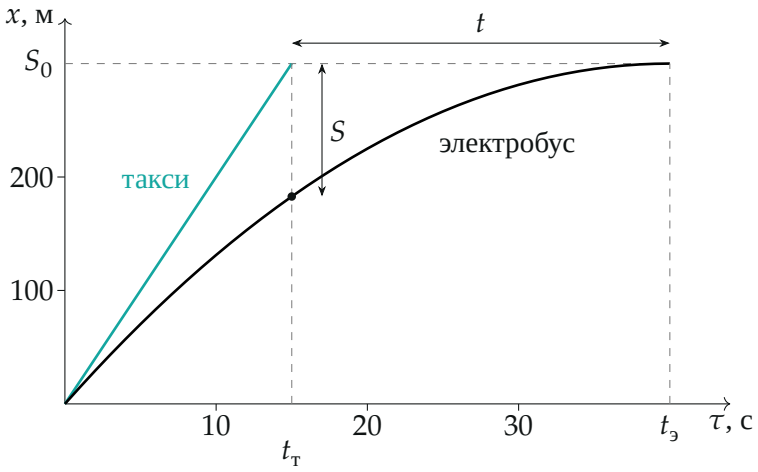


Рис. 2. Координаты такси (прямая) и электробуса (парабола с вершиной на остановке) для варианта 1; в момент t_m между ними расстояние S

4. Скорость в момент проезда такси (пункт 3). Через время $t_т$ после начала торможения

$$v = v_э - at_т = a(t_э - t_т) = at = \frac{2S_0 t}{(S_0/v_т + t)^2}.$$

Тот же результат даёт «обратное время»: до полной остановки электробусу осталось ровно t, а скорость за время t торможения с ускорением a гаснет до нуля, значит $v = at$. Вариант 1: $v = 0{,}375 \cdot 25 = 9{,}375$ м/с $\approx$ 34 км/ч.

5. Отставание (пункт 4). Такси в этот момент на остановке, а электробусу до неё осталось проехать путь за последние t секунд торможения. Скорость на этом участке падает от $v = at$ до нуля, путь — площадь треугольника под графиком $v(\tau)$ (рис. 3):

$$S = \frac{v\,t}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{S_0 t^2}{(S_0/v_\text{т} + t)^2} = \frac{0{,}375 \cdot 25^2}{2} \approx 117 \text{ м}.$$

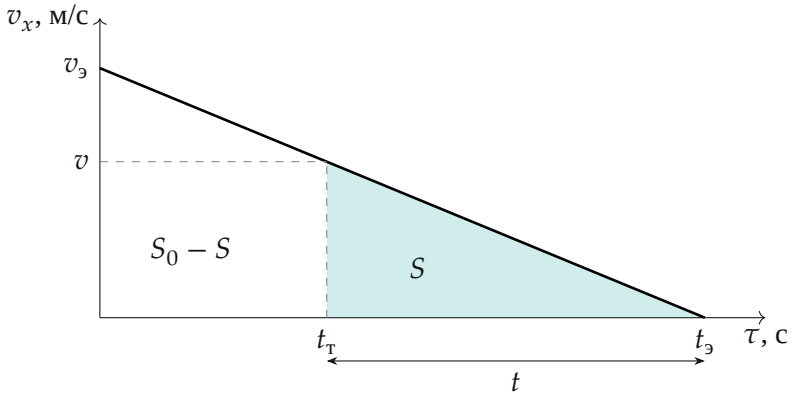


Рис. 3. Скорость электробуса во времени: площадь всего треугольника — S_0, закрашенного — путь S за последние t секунд

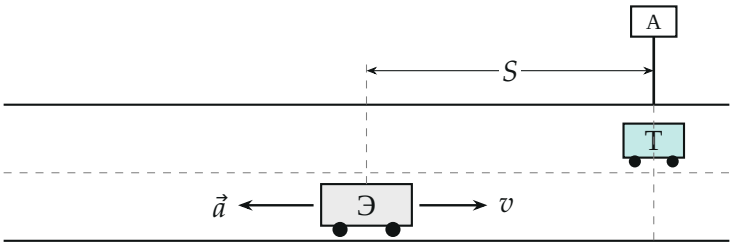


Рис. 4. Момент t_m: такси у остановки, электробус отстаёт на S и ещё едет со скоростью v, ускорение направлено против скорости

6. Все варианты (тот же расчёт на python):

Вар.	$t_т$, с	$t_э$, с	$v_э$, км/ч	a, м/с^2	v, км/ч	S, м
1	15	40	54	0,375	34	117
2	30	100	36	0,100	25	245
3	25	100	27	0,075	20	211
4	6	20	45	0,625	32	61
5	14,4	32	58	0,500	32	77

У организаторов в ответе на пункт 1 для варианта 3 стоит 34 км/ч — это опечатка: $v_э = 2 \cdot 375/100 = 7{,}5$ м/с $= 27$ км/ч, и только с ним сходятся их же $a = 0{,}075$ м/с^2 и $t_э = 100$ с.

Обратите внимание. Скорость $v_т$ дана в км/ч — до подстановки её переводят в м/с, иначе $t_т$ выйдет в неверных единицах.

Соберём ответ.

$$v_э = \frac{2S_0}{S_0/v_т + t}, \qquad a = \frac{2S_0}{(S_0/v_т + t)^2},$$

$$v = \frac{2S_0 t}{(S_0/v_т + t)^2}, \qquad S = \frac{S_0 t^2}{(S_0/v_т + t)^2}.$$

Проверка. Размерность: $[S_0/v_т + t] =$ с, $[a] =$ м/с^2, $[S] =$ м. Предел $t \to 0$ (электробус приходит одновременно с такси): $S \to 0$, $v \to 0$, $v_э \to 2v_т$ — средняя скорость электробуса равна $v_т$, а у равнозамедленного движения до нуля она вдвое меньше начальной. Отношение $S/S_0 = (t/t_э)^2$ — пути при разгоне из покоя относятся как квадраты времён: $(25/40)^2 \cdot 300 = 117$ м.

Смысл: торможение «до нуля на остановке» — то же, что разгон из покоя, только время идёт назад; так все величины считаются через время, оставшееся до остановки.

Ответ. Варианты 1–5: 1) $v_э = 54, 36, 27, 45, 58$ км/ч; 2) $a = 0{,}375, 0{,}100, 0{,}075, 0{,}625, 0{,}500$ м/с^2; 3) $v = 34, 25, 20, 32, 32$ км/ч; 4) $S = 117, 245,$

211, 61, 77 м.