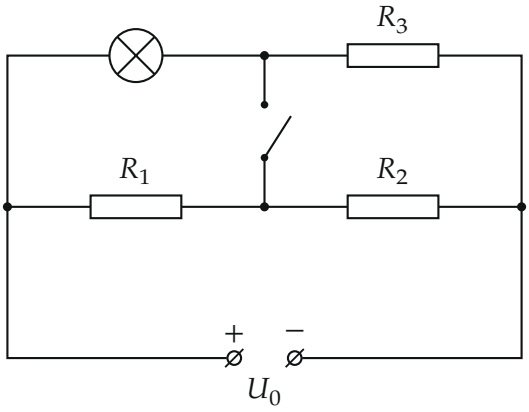
Лампочка и ключ

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 9 класс, задача 3] «Лампочка и ключ».

В цепи, показанной на рисунке, лампочка накаливания горит одинаково ярко при замкнутом и разомкнутом положениях ключа. Напряжение источника U_0, сопротивления резисторов R_1, R_2, R_3.



Вариант	U_0, В	R_1, Ом	R_2, Ом	R_3, Ом
1	4,5	10	20	30
2	9	100	200	300
3	1,5	20	30	60
4	10	80	20	40
5	5	20	30	120

1. Найдите напряжение U на лампочке при замкнутом положении ключа. Дайте ответ в вольтах с округлением до десятых долей.
2. Найдите напряжение U^* на лампочке при разомкнутом положении ключа. Дайте ответ в вольтах с округлением до десятых долей.
3. Найдите силу тока I через лампочку при замкнутом положении ключа. Дайте ответ в миллиамперах с округлением до целого числа.

4. Найдите силу тока I^* через лампочку при разомкнутом положении ключа. Дайте ответ в миллиамперах с округлением до целого числа.
5. Найдите сопротивление R лампочки в «холодном» состоянии, если оно в 10 раз меньше её сопротивления во включённом состоянии при замкнутом положении ключа. Дайте ответ в омах с округлением до десятых долей.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на постоянный ток с нелинейным элементом: сопротивление лампочки зависит от того, насколько она нагрета, и заранее неизвестно. Главная идея: «горит одинаково ярко» значит, что через лампочку идёт тот же ток при том же напряжении, — лампочка в обоих положениях ключа ведёт себя как один и тот же резистор R^*. Тогда схема — мост из R^*, R_3, R_1, R_2, и одинаковая яркость означает, что мост *уравновешен*: ток через ключ не идёт.

Обозначения. A — узел между лампочкой и R_3, B — узел между R_1 и R_2; I, U — ток и напряжение лампочки (одинаковые в двух положениях ключа, см. п. 1); I_1 — ток через R_1 и R_2 при разомкнутом ключе; $R^* = U/I$ — сопротивление горящей лампочки.

1. Почему ток через ключ равен нулю. Яркость лампочки определяется выделяемой в ней мощностью $P = UI$, а для данной лампочки ток однозначно задаёт напряжение (вольт-амперная характеристика). Одинаковая яркость — одинаковые U и I, то есть $U = U^*$, $I = I^*$. Лампочка и R_3 при любом положении ключа подключены между полюсами источника через узел A, поэтому $U_{R_3} = U_0 - U$ тоже не меняется, а с ним и ток через R_3. По закону сохранения заряда для узла A ток через ключ равен разности токов через R_3 и лампочку: при разомкнутом ключе эти токи равны, при замкнутом они те же — значит $I_{\text{кл}} = 0$. Нет тока через замкнутый ключ — значит, потенциалы A и B равны, и обе схемы считаются как разомкнутая (рис. 2).

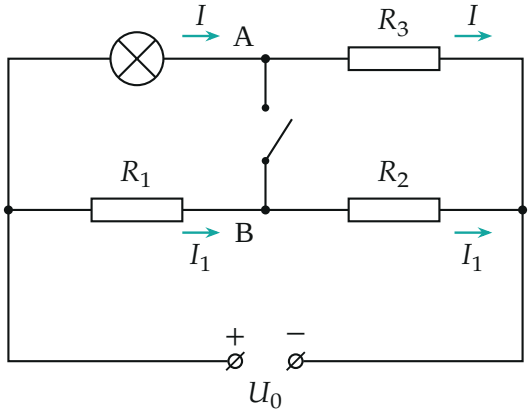


Рис. 2. Разомкнутый ключ: две независимые ветви, лампочка + R_3 и R_1 + R_2; одинаковая яркость означает $\varphi_A = \varphi_B$

2. Напряжение на лампочке (пункты 1 и 2). Ветвь $R_1 + R_2$ подключена прямо к источнику, по закону Ома для участка цепи $I_1 = \dfrac{U_0}{R_1 + R_2}$. Из $\varphi_A = \varphi_B$ напряжение на лампочке равно напряжению на R_1:

$$U = U^* = I_1 R_1 = \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{4{,}5 \cdot 10}{30} = 1{,}5 \text{ В}.$$

3. Ток через лампочку (пункты 3 и 4). Так же напряжение на R_3 равно напряжению на R_2: $U_{R_3} = I_1 R_2$, а ток через R_3 — это ток лампочки:

$$I = I^* = \frac{I_1 R_2}{R_3} = \frac{U_0 R_2}{(R_1 + R_2) R_3} = \frac{4{,}5 \cdot 20}{30 \cdot 30} = 0{,}100 \text{ А} = 100 \text{ мА}.$$

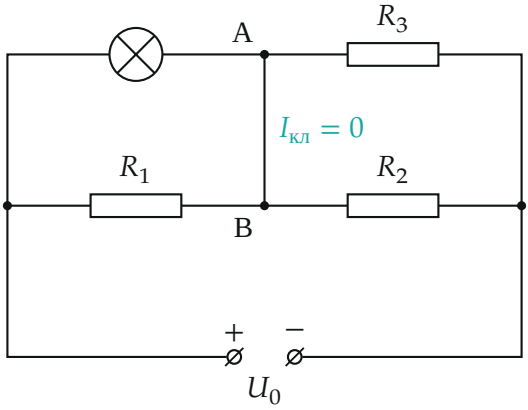


Рис. 3. Замкнутый ключ: лампочка параллельна R_1, резистор R_3 параллелен R_2; при уравновешенном мосте через ключ ток не идёт

4. Второй способ — через замкнутый ключ. Проверим, что найденные U и I действительно дают одинаковый режим, сосчитав замкнутую схему (рис. 3) напрямую. Параллельные пары: лампочка $\parallel R_1$ под напряжением U, $R_3 \parallel R_2$ под напряжением $U_0 - U$. Закон сохранения заряда для узла A–B: ток, втекающий через левую пару, равен вытекающему через правую:

$$I + \frac{U}{R_1} = (U_0 - U)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right).$$

При разомкнутом ключе (ветвь лампочки) $U = U_0 - IR_3$. Подставим: $I + \dfrac{IR_3}{R_1} = \dfrac{IR_3}{R_2} + I$, откуда снова $I = \dfrac{U_0 R_2}{(R_1 + R_2)R_3}$. Вариант 1: $1{,}5/10 + 0{,}1 = 0{,}25$ А слева и $3 \cdot (1/20 + 1/30) = 0{,}25$ А справа — сходится.

5. Сопротивление лампочки (пункт 5). Горящая лампочка:

$$R^* = \frac{U}{I} = \frac{R_1 R_3}{R_2} = \frac{10 \cdot 30}{20} = 15 \text{ Ом},$$

это условие равновесия моста $R^*/R_3 = R_1/R_2$. Холодная — в 10 раз меньше: $R = R^*/10 = 1{,}5$ Ом. Спираль накаливания при нагреве до ~ 2500 °C увеличивает сопротивление примерно в 10–15 раз, так что множитель 10 правдоподобен.

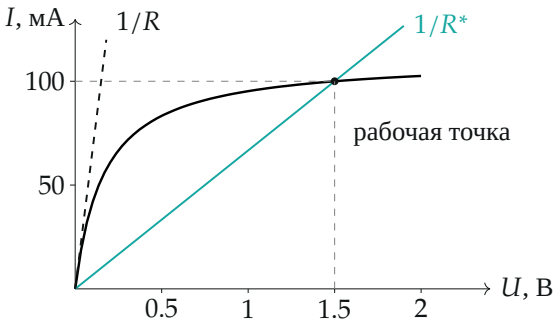


Рис. 4. Вольт-амперная характеристика лампочки (качественно, вариант 1): наклон в начале — холодная лампочка $1/R$, наклон прямой в рабочую точку (1,5 В; 100 мА) — горящая $1/R^*$

6. Все варианты (python):

Вар.	$U = U^*$, В	$I = I^*$, мА	R^*, Ом	R, Ом
1	1,5	100	15	1,5
2	3,0	20	150	15,0
3	0,6	15	40	4,0
4	8,0	50	160	16,0
5	2,0	25	80	8,0

Обратите внимание. Сопротивление лампочки не дано и не постоянно — использовать его до того, как найдены U и I, нельзя. Ключ здесь — «датчик»: раз замыкание ничего не меняет, ток через него ноль.

Соберём ответ.

$$U = U^* = \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2}, \qquad I = I^* = \frac{U_0 R_2}{(R_1 + R_2) R_3}, \qquad R = \frac{R_1 R_3}{10 R_2}.$$

Проверка. Размерность: $[U]$ = В, $[I]$ = В/Ом = А, $[R]$ = Ом. Напряжения ветви лампочки дают в сумме U_0: $U + IR_3 = 1{,}5 + 0{,}1 \cdot 30 = 4{,}5$ В $= U_0$. Предел $R_1 \to 0$: узел В соединён с левым узлом, и одинаковая яркость возможна только при $U = 0$ — формула даёт $U = 0$.

Смысл: неизменность режима при замыкании ключа — это условие равновесия моста; оно и заменяет неизвестную характеристику лампоч-

ки.

Ответ. Варианты 1–5: 1), 2) $U = U^* = 1{,}5; 3{,}0; 0{,}6; 8{,}0; 2{,}0$ В; 3), 4) $I = I^* = 100; 20; 15; 50; 25$ мА; 5) $R = 1{,}5; 15{,}0; 4{,}0; 16{,}0; 8{,}0$ Ом.