Полоса разгона

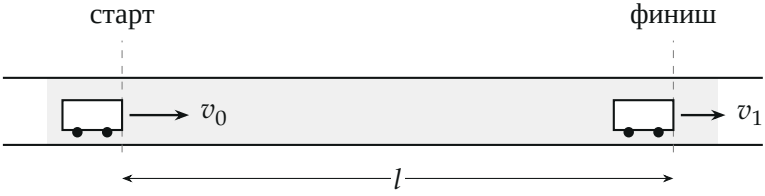
Задача 4. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 9 класс, задача 4] «Полоса разгона».

Автомобиль въезжает на прямолинейную полосу разгона со стартовой скоростью v_0 и разгоняется на этой полосе до скорости v_1, финишируя. Известно, что при движении по полосе разгона модули скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$ автомобиля в любой момент времени t связаны соотношением $v(t) = \tau \cdot a(t)$, где τ — постоянная.

Вариант	v_0, км/ч	v_1, км/ч	τ, с
1	36	108	10
2	18	36	5
3	54	72	10
4	18	54	10
5	72	108	16

1. Найдите ускорение a автомобиля на старте. Дайте ответ в м/с^2 с округлением до десятых долей.
2. Найдите рывок j автомобиля на финише. Дайте ответ в м/с^3 с округлением до десятых долей.
3. Найдите длину l полосы разгона. Дайте ответ в метрах с округлением до целого числа.

Рывком в кинематике называется векторная физическая величина $\vec{j}$, равная изменению ускорения $\vec{a}$ движения точки в единицу времени: $\vec{j} = \dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$. Иными словами, рывок — это скорость изменения ускорения. В настоящей задаче требуется найти модули векторов $\vec{j}$ и $\vec{a}$.



Поясняющий рисунок: полоса разгона длиной l, на старте скорость v_0, на финише v_1

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на неравномерное движение, где ускорение пропорционально скорости: чем быстрее едет автомобиль, тем сильнее он разгоняется, — скорость растёт всё быстрее (экспоненциально). Главная идея: формулы равноускоренного движения здесь не работают, но связь $v = \tau a$ можно «дифференцировать» по малым промежуткам времени. Поделив на Δt ещё раз, получим рывок; умножив на Δt — путь, причём путь выходит через изменение скорости, без времени.

Обозначения. Ось x — вдоль полосы по движению, все проекции положительны и равны модулям. Δt — малый промежуток времени, Δx, Δv, Δa — изменения координаты, скорости и ускорения за него.

1. Ускорение на старте (пункт 1). Связь $v = \tau a$ выполняется в любой момент, в том числе на старте, где $v = v_0$:

$$a = \frac{v_0}{\tau} = \frac{10\ \text{м/с}}{10\ \text{с}} = 1{,}0\ \text{м/с}^2 \quad \text{(вариант 1, } v_0 = 36\ \text{км/ч} = 10\ \text{м/с).}$$

2. Рывок на финише (пункт 2). Возьмём два близких момента t и $t + \Delta t$ и вычтем соотношения $v = \tau a$ в эти моменты: $\Delta v = \tau\, \Delta a$ (τ постоянна). Поделим на Δt:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \tau\, \frac{\Delta a}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a = \tau j.$$

Значит, рывок связан с ускорением так же, как ускорение со скоростью: $j = \dfrac{a}{\tau} = \dfrac{v}{\tau^2}$. На финише $v = v_1$:

$$j = \frac{v_1}{\tau^2} = \frac{30\ \text{м/с}}{(10\ \text{с})^2} = 0{,}3\ \text{м/с}^3.$$

Знак: ускорение растёт вместе со скоростью, рывок направлен по движению.

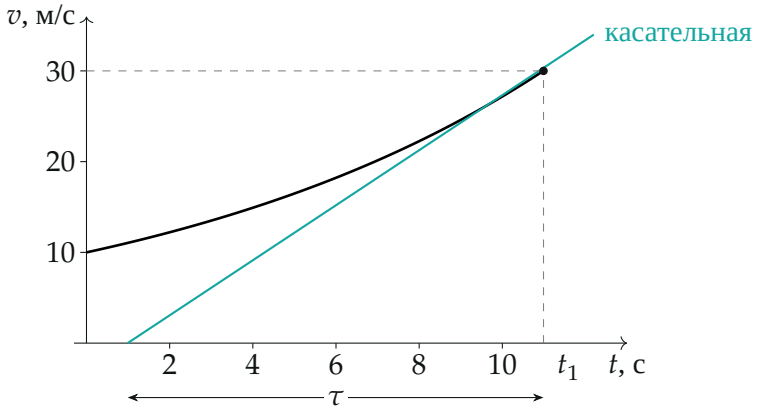


Рис. 2. Скорость во времени (вариант 1): $v = v_0 e^{t/\tau}$ растёт всё быстрее; касательная в любой точке отсекает на оси времени отрезок τ, потому что $a = v/\tau$

3. Длина полосы (пункт 3). Умножим соотношение на Δt с другой стороны. Скорость — это $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, ускорение — $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \tau \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \tau\, \Delta v.$$

За каждый малый промежуток автомобиль проходит путь, пропорциональный приросту скорости. Сложим такие пути от старта до финиша: слева сумма Δx — вся длина полосы l, справа сумма Δv — полный прирост скорости $v_1 - v_0$:

$$l = \tau(v_1 - v_0) = 10 \cdot (30 - 10) = 200 \text{ м}.$$

То же на графике $v(x)$ (рис. 3): $\Delta v/\Delta x = 1/\tau$ — постоянный наклон, скорость растёт *линейно по координате*.

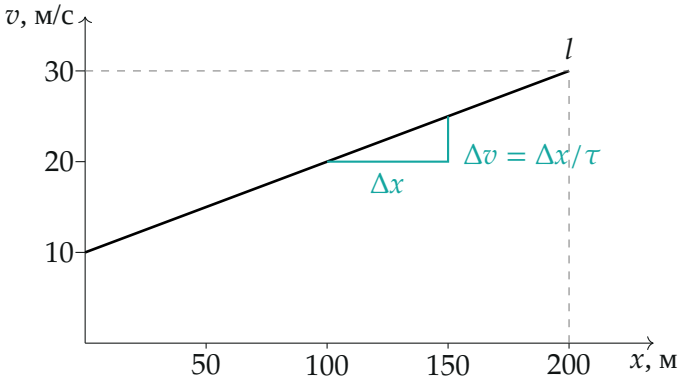


Рис. 3. Скорость от координаты (вариант 1): прямая с наклоном $1/\tau$; при росте v от 10 до 30 м/с путь $l = \tau \cdot 20$ м/с $= 200$ м

4. Время разгона (для полноты). Скорость растёт на одну и ту же долю за равные промежутки: $\Delta v/v = \Delta t/\tau$, это экспонента $v = v_0 e^{t/\tau}$. Время разгона $t_1 = \tau \ln(v_1/v_0) = 10 \ln 3 \approx 11$ с; в условии оно не нужно.

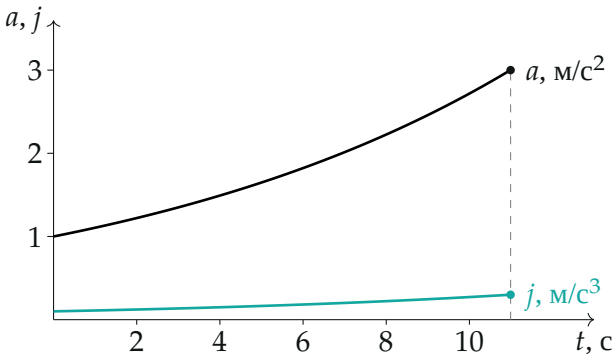


Рис. 4. Ускорение $a = v/\tau$ и рывок $j = v/\tau^2$ во времени (вариант 1): та же экспонента в масштабе $1/\tau$ и $1/\tau^2$; на старте $a = 1$ м/с^2, на финише $a = 3$ м/с^2, $j = 0{,}3$ м/с^3

5. Все варианты (python, скорости переведены в м/с):

Вар.	v_0, м/с	v_1, м/с	a, м/с^2	j, м/с^3	l, м
1	10	30	1,0	0,3	200
2	5	10	1,0	0,4	25
3	15	20	1,5	0,2	50
4	5	15	0,5	$0{,}15 \approx 0{,}2$	100
5	20	30	$1{,}25 \approx 1{,}3$	$0{,}117 \approx 0{,}1$	160

Обратите внимание. Ускорение не постоянно, поэтому $l = \dfrac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$ здесь неверно: с ускорением старта в варианте 1 вышло бы 400 м, вдвое больше.

Соберём ответ.

$$a = \frac{v_0}{\tau}, \qquad j = \frac{v_1}{\tau^2}, \qquad l = \tau(v_1 - v_0).$$

Проверка. Размерность: $[v_0/\tau]$ = м/с^2, $[v_1/\tau^2]$ = м/с^3, $[\tau v]$ = м. Второй способ для l — через время: путь — площадь под графиком $v(t)$ (рис. 2), для экспоненты $\int_0^{t_1} v_0 e^{t/\tau}\,dt = \tau v_0(e^{t_1/\tau} - 1) = \tau(v_1 - v_0)$ — то же. Оценка: средняя скорость на полосе $200/11 \approx 18$ м/с лежит между 10 и 30 м/с.

Смысл: при $v = \tau a$ скорость меняется на одинаковую долю за одинаковое время и на одинаковую величину на одинаковом пути.

Ответ. Варианты 1–5: 1) $a = v_0/\tau$: 1,0; 1,0; 1,5; 0,5; 1,3 м/с^2; 2) $j = v_1/\tau^2$: 0,3; 0,4; 0,2; 0,2; 0,1 м/с^3; 3) $l = \tau(v_1 - v_0)$: 200; 25; 50; 100; 160 м.