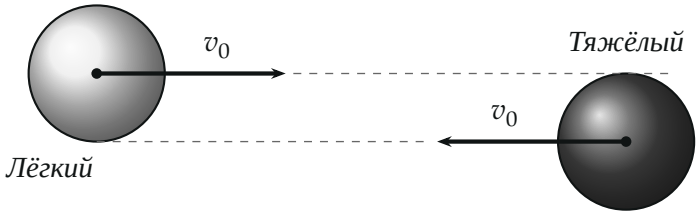
Нецентральный удар шаров

Задача 5. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 9 класс, задача 5] «Нецентральный удар шаров».

Два одинаковых по размеру, но разных по массе гладких шара движутся навстречу друг другу с одинаковыми постоянными скоростями v_0 так, что прямая, по которой движется центр одного шара, касается другого шара (см. рис.). Шары испытывают абсолютно упругий нецентральный удар. Известно, что масса лёгкого шара намного меньше массы тяжёлого.



Вариант	1	2	3	4	5
v_0, м/с	5	10	9	6	3

1. Найдите скорость v_1 лёгкого шара до соударения в системе отсчёта тяжёлого шара. Дайте ответ в м/с с округлением до целого числа.
2. Найдите скорость v_2 лёгкого шара после соударения в системе отсчёта тяжёлого шара. Дайте ответ в м/с с округлением до целого числа.
3. Найдите скорость v_3 лёгкого шара после соударения в лабораторной системе отсчёта. Дайте ответ в м/с с округлением до целого числа.
4. На какой угол α повернётся вектор скорости лёгкого шара в результате соударения с тяжёлым в лабораторной системе отсчёта? Дайте ответ в градусах с округлением до целого числа.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на упругий удар лёгкого тела о массивное и переход между системами отсчёта. Главная идея: тяжё-

лый шар при ударе о лёгкий скорость не меняет, поэтому связанная с ним система отсчёта инерциальная, и в ней лёгкий шар просто упруго отскакивает от неподвижной гладкой поверхности — как мяч от стенки: модуль скорости тот же, «угол падения равен углу отражения» относительно нормали. Нормаль — линия центров в момент касания; её направление задаёт геометрия рисунка. Потом возвращаемся в лабораторную систему сложением скоростей.

Обозначения. Ось x — по начальной скорости лёгкого шара, ось y — вверх (лёгкий шар выше тяжёлого, рис. 1). R — радиус шаров; $\vec{u}$ — скорость тяжёлого шара, $u_x = -v_0$; $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ — скорости лёгкого шара относительно тяжёлого до и после удара; $\vec{v}_3$ — скорость лёгкого шара после удара в лабораторной системе.

1. Скорость до удара в системе тяжёлого шара (пункт 1). Закон сложения скоростей: скорость относительно тяжёлого шара равна скорости в лабораторной системе минус скорость тяжёлого шара:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 - \vec{u}, \qquad v_{1x} = v_0 - (-v_0) = 2v_0 = 10\ \text{м/с} \quad \text{(вариант 1)}.$$

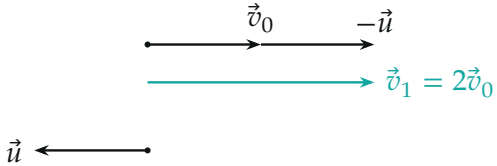


Рис. 2. Скорость лёгкого шара относительно тяжёлого: к $\vec{v}_0$ прибавляем $-\vec{u}$; шары сближаются со скоростью $2v_0$

2. Где нормаль. Шары гладкие, поэтому сила удара направлена по нормали к поверхностям — по линии центров в момент касания. Центр лёгкого шара движется (относительно тяжёлого) по прямой $y = R$, касающейся тяжёлого шара сверху (если центр тяжёлого — начало координат). В момент касания расстояние между центрами $2R$, а разность их высот R, поэтому линия центров наклонена к оси x на угол φ:

$$\sin\varphi = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}, \qquad \varphi = 30^\circ.$$

3. Скорость после удара в системе тяжёлого шара (пункт 2). В этой системе тяжёлый шар покоится и (масса много больше) остаётся покоящимся, его кинетическая энергия не меняется. Удар абсолютно упругий — закон сохранения механической энергии для лёгкого шара: $\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}$, то есть

$$v_2 = v_1 = 2v_0 = 10 \text{ м/с}.$$

Направление: сила по нормали меняет только нормальную проекцию скорости (на противоположную), касательная сохраняется — угол отражения равен углу падения. Скорость $\vec{v}_1$ идёт к нормали под углом 30°, отражённая — под 30° с другой стороны, и вектор поворачивается на $180° - 2 \cdot 30° = 120°$ (рис. 3):

$$\vec{v}_2 = 2v_0(\cos 120°;\ \sin 120°) = (-v_0;\ \sqrt{3}\,v_0).$$

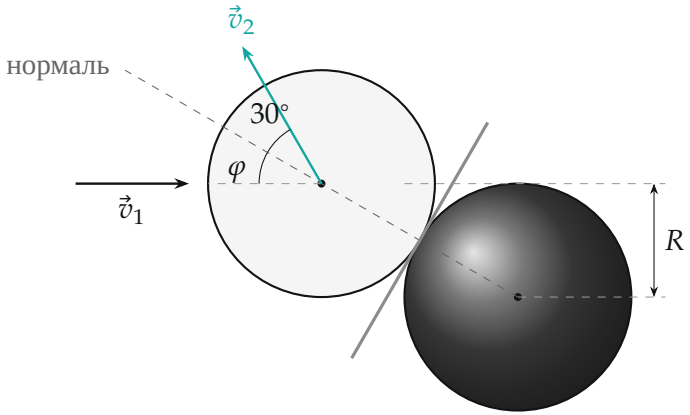


Рис. 3. Удар в системе тяжёлого шара: линия центров (пунктир) наклонена на $\varphi = 30°$; скорость $\vec{v}_1$ отражается от плоскости касания (серая черта), $|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|$, вектор повернулся на 120°; угол $\varphi = 30°$ — между нормалью и направлением, обратным $\vec{v}_1$

4. Скорость после удара в лабораторной системе (пункт 3). Снова

закон сложения скоростей: $\vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \vec{u}$. Проекции:

$$v_{3x} = -v_0 - v_0 = -2v_0, \qquad v_{3y} = \sqrt{3}\,v_0,$$

$$v_3 = \sqrt{4v_0^2 + 3v_0^2} = \sqrt{7}\,v_0 \approx 2{,}65v_0.$$

Вариант 1: $v_3 = \sqrt{7}\cdot 5 \approx 13$ м/с. То же по теореме косинусов в треугольнике скоростей (рис. 4): угол между $\vec{v}_2$ и $\vec{u}$ равен $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $v_3^2 = (2v_0)^2 + v_0^2 + 2\cdot 2v_0 \cdot v_0 \cos 60^\circ = 7v_0^2$.

5. Угол поворота (пункт 4). До удара скорость шла по оси x, после — имеет проекции $(-2v_0;\ \sqrt{3}v_0)$, то есть направлена во вторую четверть. Угол от оси x:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{v_{3y}}{|v_{3x}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 180^\circ - \alpha \approx 40{,}9^\circ, \qquad \alpha \approx 139^\circ.$$

Ответ не зависит от v_0 — одинаков во всех вариантах. Второй способ (как у организаторов): $\alpha = 120^\circ + \delta$, где δ — угол между $\vec{v}_3$ и $\vec{v}_2$; по теореме синусов $\sin\delta = \dfrac{v_0 \sin 120^\circ}{v_3} = \sqrt{\dfrac{3}{28}}$, $\delta \approx 19{,}1^\circ$, $\alpha \approx 139{,}1^\circ$.

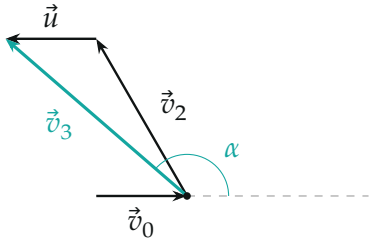


Рис. 4. Лабораторная система: $\vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \vec{u}$; скорость лёгкого шара повернулась на $\alpha \approx 139^\circ$

6. Все варианты (python): $v_1 = v_2 = 2v_0$, $v_3 = \sqrt{7}\,v_0$:

Вариант	1	2	3	4	5
$v_1 = v_2$, м/с	10	20	18	12	6
v_3, м/с	13	26	24	16	8
α	139°	139°	139°	139°	139°

Обратите внимание. В лабораторной системе модуль скорости лёгкого шара *не* сохраняется ($\sqrt{7}v_0 > v_0$): тяжёлый шар, двигаясь навстречу, совершает над ним положительную работу. Сохраняется он только в системе тяжёлого шара.

Соберём ответ. $v_1 = v_2 = 2v_0$, $v_3 = \sqrt{7}\,v_0$, $\alpha = 180^\circ - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 139^\circ$.

Проверка. Размерность скоростей — м/с, угол безразмерен. Предельный случай центрального удара ($\varphi = 0$): в системе тяжёлого шара скорость разворачивается на 180°, $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_0$, в лабораторной $\vec{v}_3 = -3\vec{v}_0$ — известный результат отскока лёгкого мяча от набегающей тяжёлой стенки. Касательная к линии центров проекция относительной скорости сохраняется: $\vec{v}_1 \cdot \vec{\tau} = \vec{v}_2 \cdot \vec{\tau}$, где $\vec{\tau} = (\cos 60^\circ; \sin 60^\circ)$: $2v_0 \cdot \frac{1}{2} = v_0$ и $-v_0 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3}v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = v_0$ — верно.

Смысл: упругий удар о массивное тело — это зеркальное отражение в его системе отсчёта; всё остальное — сложение скоростей.

Ответ. Варианты 1–5: 1) $v_1 = 2v_0$: 10, 20, 18, 12, 6 м/с; 2) $v_2 = 2v_0$: 10, 20, 18, 12, 6 м/с; 3) $v_3 = \sqrt{7}\,v_0$: 13, 26, 24, 16, 8 м/с; 4) $\alpha \approx 139^\circ$ во всех вариантах.