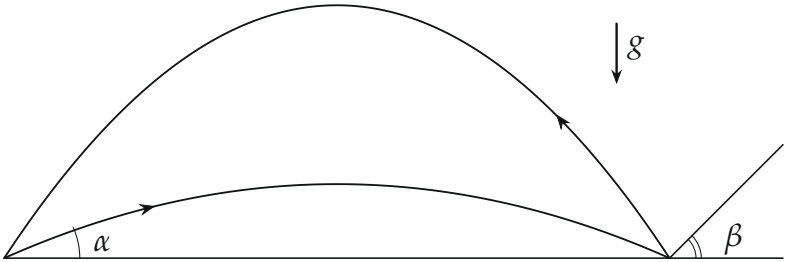
Выстрел из пушки и отскок от плоскости

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, пригласительный этап, 10 класс, задача 1] «Выстрел из пушки и отскок от плоскости».

Из игрушечной пушки выстрелили маленьким тяжёлым шариком так, что он вылетел из ствола со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пролетев некоторое расстояние S, шарик абсолютно упруго ударился о плоскость, наклонённую к горизонту под углом β. Отскочив от плоскости и пролетев по траектории, не совпадающей с траекторией полёта из пушки до удара о плоскость, шарик упал рядом с местом выстрела. Точки выстрела и соударения с плоскостью находятся на одной высоте. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Угол выстрела α монотонно увеличивается от 15° до 75°. Установите соответствие между параметрами и характером их изменения.

1. Соотнесите параметры и характер их изменения: время полёта шарика до удара о плоскость; максимальная высота траектории при полёте от места выстрела до удара о плоскость; расстояние от точки выстрела до места удара о плоскость. Варианты характера изменения: монотонно увеличивается; монотонно уменьшается; сначала уменьшается, затем увеличивается; сначала увеличивается, затем уменьшается. В задании используются не все варианты ответа.
2. Угол выстрела $\alpha = 40°$. Под каким углом к горизонту подлетит шарик к месту выстрела после отскока от плоскости? Ответ выразите в градусах, округлите до целых.

3. Угол выстрела $\alpha = 40°$. Под каким углом β к горизонту должна быть расположена наклонная плоскость, чтобы после отскока шарик прилетел к месту выстрела? Запишите значение острого угла. Ответ выразите в градусах, округлите до целых.
4. Скорость v_0, с которой вылетает шарик из пушки, составляет 10 м/с. Определите максимальное расстояние по горизонтали, которое может пролететь при такой скорости шарик. Ответ выразите в метрах, округлите до целых.
5. Скорость, с которой вылетает шарик из пушки, $v_0 = 10$ м/с, угол выстрела $\alpha = 30°$. Определите расстояние между вершинами парабол, являющихся траекториями шарика при движении от пушки к плоскости и обратно. Ответ выразите в метрах, округлите до десятых.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту, и упругий удар. Без сопротивления воздуха горизонтальная проекция скорости постоянна, вертикальная меняется как при свободном падении — отсюда стандартные время, высота и дальность. Траектория симметрична: в точку удара шарик приходит с той же скоростью v_0 под тем же углом α вниз. Упругий удар о гладкую плоскость сохраняет модуль скорости и «отражает» её направление, как свет в зеркале. Обратно шарик летит с той же скоростью v_0 на ту же дальность S — это возможно только под углом α или $90° - \alpha$; первый вариант — та же траектория, его исключает условие.

Обозначения. Ось x — горизонтально от пушки к плоскости, ось y — вертикально вверх, начало — в пушке; t — время полёта до удара; H — максимальная высота; S — дальность; α' — угол, под которым шарик летит обратно; H_1, H_2 — высоты вершин парабол «туда» и «обратно».

Пункт 1. Как меняются t, H, S. Проекции скорости: $v_x = v_0 \cos\alpha$ (постоянна), $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ (рис. 1). Уравнения движения:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Точка удара на той же высоте: $y = 0$ при $t \neq 0$, отсюда время полёта и

дальность

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad S = v_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

В вершине $v_y = 0$, и по формуле $v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gH$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

При росте α от 15° до 75° синус растёт, поэтому t и H *монотонно увеличиваются*; $\sin 2\alpha$ растёт до $2\alpha = 90°$ и потом убывает, поэтому S *сначала увеличивается, затем уменьшается* с максимумом при $\alpha = 45°$ (рис. 2).

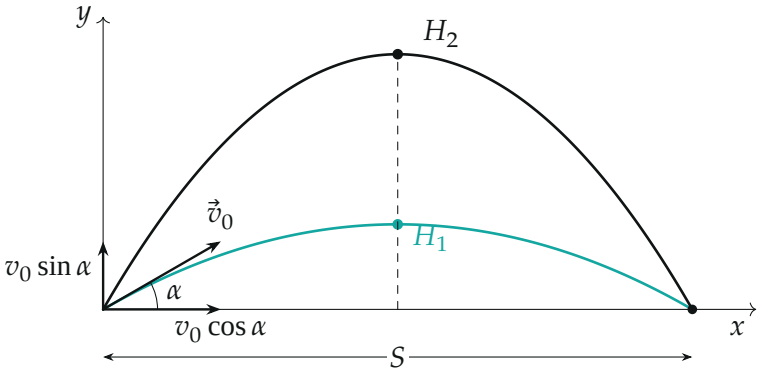


Рис. 1. Траектории «туда» (бирюзовая, $\alpha = 30°$) и «обратно» (чёрная, $90° - \alpha = 60°$) при $v_0 = 10$ м/с — построены по формулам; вершины на одной вертикали $x = S/2$

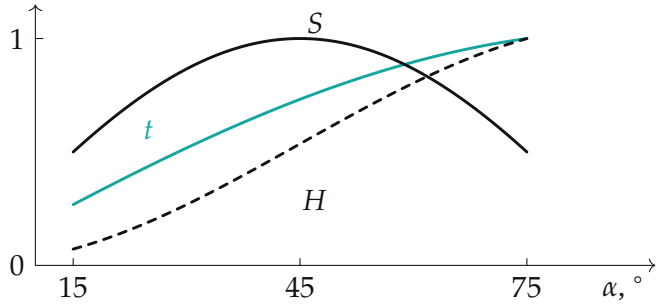


Рис. 2. Время полёта $t \propto \sin\alpha$, высота $H \propto \sin^2\alpha$ (пунктир) и дальность $S \propto \sin 2\alpha$ при α от 15° до 75°; t и H отнесены к значениям при 75°, S — к максимуму

Пункт 2. Угол подлёта к пушке. После упругого удара скорость по модулю равна v_0 (траектория «туда» симметрична, в точку удара шарик приходит со скоростью v_0, удар её модуль не меняет). Обратный полёт — тоже бросок с высоты точки удара на ту же высоту, на расстояние S, со скоростью v_0 под некоторым углом α':

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha'}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha' = \sin 2\alpha.$$

Решения с острыми углами: $\alpha' = \alpha$ (та же траектория — исключена условием) и $2\alpha' = 180^\circ - 2\alpha$, то есть $\alpha' = 90^\circ - \alpha$. По симметрии траектории «обратно» шарик подлетает к пушке под тем же углом, под каким вылетел от плоскости:

$$\alpha' = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

Пункт 3. Наклон плоскости. Упругий удар о гладкую плоскость: проекция скорости на плоскость сохраняется, проекция на нормаль меняет знак. Значит, нормаль к плоскости — биссектриса угла между вектором $-\vec{v}_{\text{до}}$ (откуда шарик пришёл) и $\vec{v}_{\text{после}}$ (рис. 3). Отсчитываем направления от горизонтали «назад», к пушке: $-\vec{v}_{\text{до}}$ поднят на $\alpha = 40^\circ$, $\vec{v}_{\text{после}}$ — на $\alpha' = 50^\circ$. Нормаль — посередине:

$$\gamma = \frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{40^\circ + 50^\circ}{2} = 45^\circ$$

от горизонтали. Плоскость перпендикулярна нормали:

$$\beta = 90^\circ - \gamma = 45^\circ.$$

Для любого α получилось бы $\gamma = \frac{\alpha + 90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ$ — плоскость под 45° возвращает шарик к пушке при любом угле выстрела.

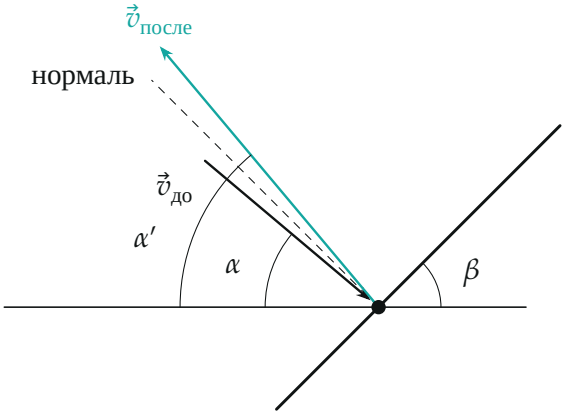


Рис. 3. Удар о плоскость: $\vec{v}_{до}$ и $\vec{v}_{после}$ симметричны относительно нормали; при $\alpha = 40°$, $\alpha' = 50°$ нормаль под $45°$, плоскость под $\beta = 45°$

Пункт 4. Наибольшая дальность. Из пункта 1 $S = v_0^2 \sin 2\alpha / g$, наибольшее значение при $\sin 2\alpha = 1$, $\alpha = 45°$:

$$S_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{10^2}{10}\ \text{м} = 10\ \text{м}.$$

Обратный путь при этом тоже 10 м (при $\alpha = 45°$ углы α и $90° - \alpha$ совпадают); в ответ идёт дальность одного полёта, как у организаторов.

Пункт 5. Расстояние между вершинами. Обе параболы проходят через одни и те же точки (пушка и точка удара) и симметричны, поэтому вершины обеих — над серединой отрезка, $x = S/2$ (рис. 1). Расстояние между вершинами — разность высот:

$$H_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad H_2 = \frac{v_0^2 \sin^2(90° - \alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g},$$

$$\Delta = |H_2 - H_1| = \frac{v_0^2 |\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha|}{2g} = \frac{v_0^2 |\cos 2\alpha|}{2g} = \frac{100 \cdot 0{,}5}{20}\ \text{м} = 2{,}5\ \text{м}.$$

Числа: $H_1 = 1{,}25$ м, $H_2 = 3{,}75$ м, $S = 8{,}66$ м.

Обратите внимание. Угол $90° - \alpha$ возникает не «из картинки», а из равенства дальностей: модуль скорости и расстояние те же, а угол другой.

И нормаль к плоскости делит пополам угол между *обращённой* входящей скоростью и выходящей — не между самими векторами $\vec{v}_{\text{до}}$ и $\vec{v}_{\text{после}}$.

Проверка. Размерности: $[v_0^2/g] = $ м, $[v_0/g] = $ с. Второй способ для пункта 3 — через проекции: при $\beta = 45°$ единичная нормаль $\vec{n} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$; $\vec{v}_{\text{до}} = v_0(\cos 40°; -\sin 40°) = v_0(0{,}766; -0{,}643)$, $\vec{v}_{\text{после}} = \vec{v}_{\text{до}} - 2(\vec{v}_{\text{до}} \cdot \vec{n})\vec{n} = v_0(-0{,}643; 0{,}766)$ — это угол $50°$ к горизонтали к пушке, совпадает. Предел $\alpha = 45°$: $\Delta = 0$ — траектории совпадают, как и должно быть.

Смысл: при той же скорости дальность одинакова для углов α и $90° - \alpha$, а плоскость под $45°$ как раз переводит один в другой.

Ответ. 1) время полёта — монотонно увеличивается; максимальная высота — монотонно увеличивается; расстояние — сначала увеличивается, затем уменьшается; 2) $50°$; 3) $\beta = 45°$; 4) $S_{\max} = v_0^2/g = 10$ м; 5) $\Delta = v_0^2|\cos 2\alpha|/(2g) = 2{,}5$ м.