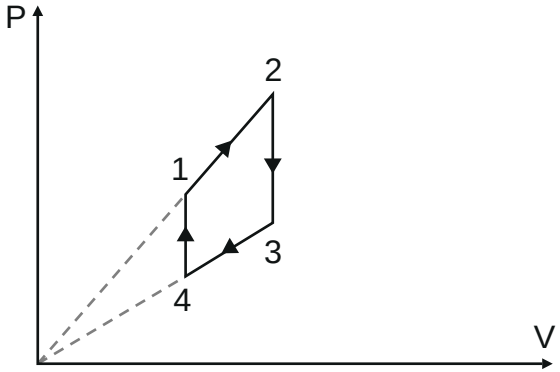
Цикл с участками $P \sim V$

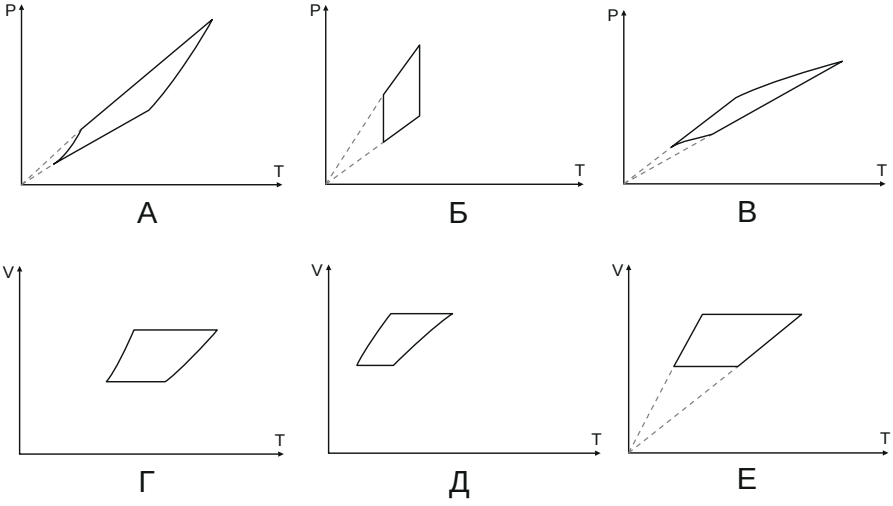
Задача 2. [ВсОШ 2025/26, пригласительный этап, 10 класс, задача 2] «Цикл с участками $P \sim V$».

Один моль одноатомного идеального газа участвует в циклическом процессе 1–2–3–4–1 (см. рис.). Точки 1, 2, 3 и 4 не указаны на диаграммах намеренно.



1. Охарактеризуйте процессы для отдельных участков этого цикла: участок 1–2; участок 2–3; участок 3–4; участок 4–1. Варианты: изобарный; изохорный; изотермический; адиабатический; не относится к изопроцессам. В задании используются не все варианты.
2. Выберите диаграммы в координатах $P(T)$ и $V(T)$, соответствующие процессу 1–2–3–4–1 в координатах $P(V)$. Диаграммы обозначены буквами А, Б, В, Г, Д, Е.
3. Пусть максимальный объём в процессе в 2 раза больше минимального, а отношение давлений в точках 1 и 4 равно 3. Определите отношение максимальной температуры, выраженной в градусах Кельвина, в данном процессе к минимальной. Ответ округлите до десятых.
4. Пусть давление в точке 3 в 2 раза больше давления в точке 4, а температуры в точках 1 и 3 равны. Во сколько раз давление в точке 2 больше давления в точке 3? Ответ округлите до десятых.

5. Давления в точках 2 и 1 относятся как 2 : 1. Известно, что на участке 4–1 к газу было подведено 25 Дж теплоты. Какое количество теплоты отвели от газа на участке 2–3? Ответ выразите в джоулях, округлите до целых.



Диаграммы к пункту 2

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на графики процессов идеального газа. На $P(V)$ участки 1–2 и 3–4 лежат на прямых через начало координат: $P = kV$ со своим k на каждом. Участки 2–3 и 4–1 вертикальны — изохоры. Всё остальное — уравнение Менделеева–Клапейрона $PV = RT$ (один моль): оно связывает температуру с произведением PV и позволяет перестроить цикл в другие координаты. Теплота на изохоре — только изменение внутренней энергии, работы там нет.

Обозначения. P_i, V_i, T_i — параметры в точке i; $V_1 = V_4 = V_{\min}$, $V_2 = V_3 = V_{\max}$; $k_{12} = P_1/V_1$, $k_{34} = P_4/V_4$ — наклоны прямых; $s = V_{\max}/V_{\min}$; R — газовая постоянная.

Пункт 1. Вид участков. На 2–3 и 4–1 объём не меняется — *изохорные*. На 1–2 и 3–4 $P = kV$: давление, объём и (по $PV = RT$) температура $T = kV^2/R$ меняются все — это *не изопроцессы*. Адиабата $PV^{5/3} = \text{const}$ — убывающая кривая, а здесь P растёт с V; изотерма $PV = \text{const}$ тоже убывает.

Пункт 2. Диаграммы $P(T)$ и $V(T)$. На участке $P = kV$ подставим $V = P/k$ в $PV = RT$:

$$\frac{P^2}{k} = RT \;\Rightarrow\; P = \sqrt{kRT}, \qquad kV^2 = RT \;\Rightarrow\; V = \sqrt{\frac{RT}{k}}.$$

Обе зависимости — корень из T: выпуклые вверх кривые, круче у малых T. На изохоре $P = \dfrac{R}{V}\,T$ — отрезок прямой через начало координат на $P(T)$, а на $V(T)$ — горизонтальный отрезок.

Построим по числам (возьмём $V_1 = 1$, $V_2 = 2$, $P_4 = 1$, $P_1 = 3$ в условных единицах, $R = 1$): $T_1 = 3$, $T_2 = 12$, $T_3 = 4$, $T_4 = 1$ (рис. 1). На $P(T)$: два отрезка на прямых через начало (изохоры) и две кривые $\sqrt{T}$ — это диаграмма **В** (у А кривые выгнуты в другую сторону, у Б изохоры — отрезки вертикальны). На $V(T)$: два горизонтальных отрезка и две кривые $\sqrt{T}$, выпуклые вверх, — диаграмма **Д** (у Г кривая 1–2 выгнута вниз, у Е боковые стороны — отрезки прямых через начало).

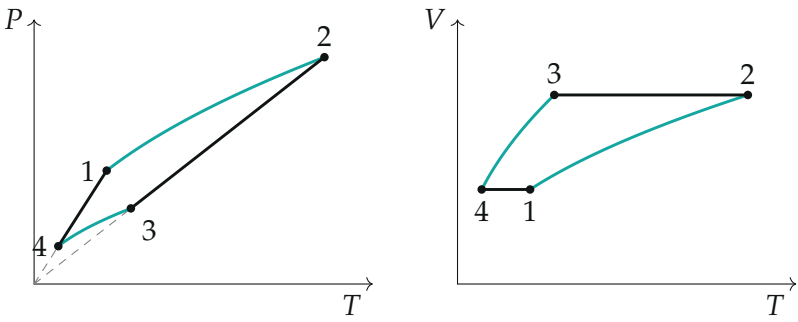


Рис. 1. Цикл, перестроенный по точкам: слева $P(T)$ (как диаграмма В), справа $V(T)$ (как Д); бирюзовые — участки $P = kV$, кривые $\propto \sqrt{T}$

Пункт 3. Отношение $T_{\max}/T_{\min}$. Температура $T = PV/R$ растёт с P и с V, поэтому максимальна в точке 2 (наибольшие P и V), минимальна в точке 4 (рис. 2). Дано $s = V_2/V_1 = 2$, $P_1/P_4 = 3$. Точки 1 и 2 на одной прямой $P = k_{12}V$, поэтому $P_2 = P_1\,V_2/V_1 = sP_1$. Тогда

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{T_2}{T_4} = \frac{P_2V_2}{P_4V_4} = \frac{sP_1 \cdot sV_1}{P_4V_1} = s^2\,\frac{P_1}{P_4} = 4 \cdot 3 = 12{,}0.$$

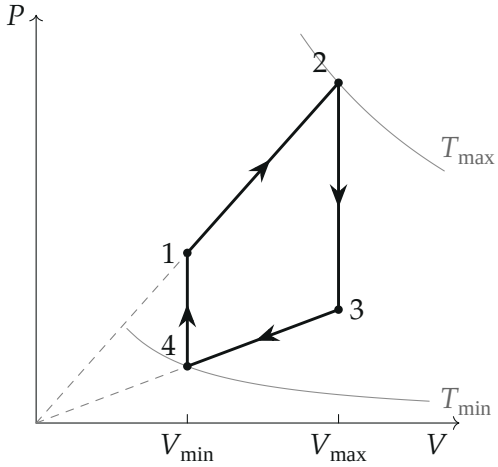


Рис. 2. Цикл в масштабе пункта 3 и изотермы (серые гиперболы $PV = const$) через точки 2 и 4: самая горячая точка — 2, самая холодная — 4

Пункт 4. Отношение P_2/P_3. Точки 3 и 4 на прямой $P = k_{34}V$: $V_3/V_4 = P_3/P_4 = 2$, значит $V_{max} = 2V_{min}$. Равенство $T_1 = T_3$ по $PV = RT$:

$$P_1V_1 = P_3V_3 \;\Rightarrow\; P_1 = P_3\,\frac{V_3}{V_1} = 2P_3.$$

Точки 1 и 2 на прямой $P = k_{12}V$: $P_2 = P_1\,\dfrac{V_2}{V_1} = 2P_1 = 4P_3$:

$$\frac{P_2}{P_3} = 4{,}0.$$

Пункт 5. Теплота на 2–3. На прямых $P = kV$ отношения давлений равны отношениям объёмов: $s = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{V_2}{V_1} = 2$, и так же $\dfrac{V_3}{V_4} = s$, $\dfrac{P_3}{P_4} = s$ (потому что $V_3 = V_2$, $V_4 = V_1$). Температуры:

$$T_2 = \frac{P_2V_2}{R} = s^2\,\frac{P_1V_1}{R} = s^2T_1, \qquad T_3 = s^2T_4.$$

Первый закон термодинамики на изохоре: работы нет, $Q = \Delta U = \frac{3}{2}R\,\Delta T$ (одноатомный газ, один моль). На 4–1 подвели $Q_{41} = \frac{3}{2}R(T_1 - T_4) =$

25 Дж. На 2–3 газ остывает, отведено

$$Q_{\text{отв}} = \tfrac{3}{2}R(T_2 - T_3) = s^2 \cdot \tfrac{3}{2}R(T_1 - T_4) = 4 \cdot 25\ \text{Дж} = 100\ \text{Дж}.$$

Обратите внимание. Отрезок прямой $P = kV$ на $P(V)$ проходит через начало координат, но это *не* изобара и не изотерма: на $P(T)$ и $V(T)$ он становится кривой $\sqrt{T}$, а прямыми через начало на $P(T)$ оказываются изохоры. В пункте 5 «отвели» — модуль: $Q_{23} = -100$ Дж.

Проверка. Размерности: отношения безразмерны, $[\tfrac{3}{2}R\Delta T] =$ Дж. Числа пункта 5 на примере $V_1 = 1$, $P_4 = 1$, $P_1 = 3$ ($R = 1$): $T_1 = 3$, $T_4 = 1$, $T_2 = 12$, $T_3 = 4$; $(12-4)/(3-1) = 4 = s^2$ — совпадает. Предел $s \to 1$: цикл стягивается в отрезок, $T_{\max}/T_{\min} \to P_1/P_4$, $Q_{\text{отв}} \to Q_{41}$ — разумно.

Смысл: на прямой через начало $P \propto V$ температура растёт как V^2, поэтому все отношения в задаче — квадраты отношения объёмов.

Ответ. 1) 1–2 — не изопроцесс; 2–3 — изохорный; 3–4 — не изопроцесс; 4–1 — изохорный; 2) $P(T)$ — В, $V(T)$ — Д; 3) $T_{\max}/T_{\min} = 12{,}0$; 4) $P_2/P_3 = 4{,}0$; 5) 100 Дж.