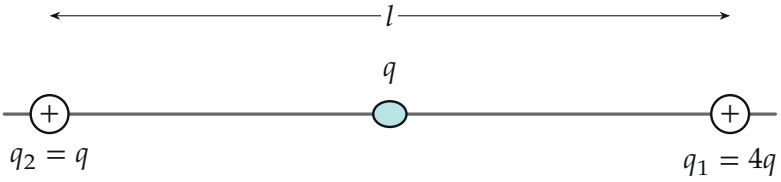
Бусинка между двумя зарядами

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, пригласительный этап, 10 класс, задача 3] «Бусинка между двумя зарядами».

На непроводящей спице на расстоянии l друг от друга закреплены два положительных точечных заряда величиной $q_1 = 4q$ и $q_2 = q$. Между ними на спице располагается маленькая бусинка, также заряженная положительным зарядом q. Бусинка может перемещаться вдоль спицы без трения.

1. Пусть $l = 30$ см. Определите расстояние от бусинки до заряда q_2, на котором она будет находиться в положении устойчивого равновесия. Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.
2. В начальный момент времени бусинку удерживают посередине между зарядами. Затем бусинку освобождают. Как меняется модуль ускорения бусинки в процессе её последующего движения от начального положения до точки максимального сближения с зарядом q_2? Варианты: монотонно уменьшается; монотонно увеличивается; сначала увеличивается, затем уменьшается; сначала уменьшается, затем увеличивается.
3. Пусть $l = 30$ см. В начальный момент времени бусинку удерживают посередине между зарядами. Бусинку освобождают. На какое минимальное расстояние бусинка приблизится к заряду q_2 в процессе последующих колебаний? Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.
4. На какое максимальное расстояние от заряда q_2 будет удаляться бусинка в процессе последующих колебаний? Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.
5. На каком расстоянии от заряда q_2 бусинка будет иметь максимальную скорость в процессе последующих колебаний? Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.



Поясняющий рисунок: заряды на спице, бусинка в начальном положении — посередине

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие и закон сохранения энергии в электростатическом поле. Оба закреплённых заряда отталкивают бусинку: q_2 — в сторону q_1, q_1 — в сторону q_2. Возле каждого заряда его отталкивание сильнее, поэтому между ними есть точка, где силы равны, — это положение устойчивого равновесия. Отпущенная из середины бусинка движется к этой точке, проскакивает её и останавливается по другую сторону; трения нет — полная энергия сохраняется, и бусинка колеблется между двумя точками с одинаковой потенциальной энергией.

Обозначения. Ось x вдоль спицы от q_2 к q_1, x — расстояние бусинки до q_2, $l-x$ — до q_1; $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; x_0 — положение равновесия; $x_{\min}$ и $x_{\max}$ — ближайшая и дальняя от q_2 точки остановки.

Пункт 1. Положение равновесия. Силы на бусинку (закон Кулона), проекции на ось x (рис. 1):

$$F_2=\frac{kqq_2}{x^2}=\frac{kq^2}{x^2}\ (\text{вдоль } x),\qquad F_1=\frac{kqq_1}{(l-x)^2}=\frac{4kq^2}{(l-x)^2}\ (\text{против } x).$$

Условие равновесия $F_x=F_2-F_1=0$:

$$\frac{1}{x_0^2}=\frac{4}{(l-x_0)^2}\ \Rightarrow\ l-x_0=2x_0\ \Rightarrow\ x_0=\frac{l}{3}=10{,}0\text{ см}.$$

Равновесие устойчивое: сдвиг к q_2 ($x<x_0$) увеличивает F_2 и уменьшает F_1 — бусинку возвращает назад; сдвиг к q_1 — наоборот. Вдоль спицы это так; поперёк спица держит бусинку.

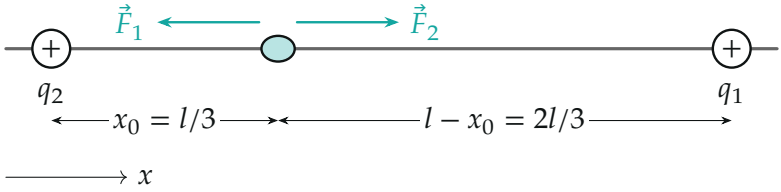


Рис. 1. В равновесии силы отталкивания равны: заряд q_1 вчетверо больше, поэтому он вдвое дальше

Пункт 2. Модуль ускорения при движении к q_2. По второму закону Ньютона $a = |F_x|/m$, где

$$F_x(x) = kq^2\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(l-x)^2}\Big).$$

Из середины ($x = 15$ см, $F_x < 0$) бусинка идёт к q_2. Пока $x > x_0$, сила тянет к q_2, но по мере приближения к x_0 разность сил убывает до нуля; после x_0 сила направлена от q_2 и растёт, тормозя бусинку до остановки в $x_{\min} = 6$ см (пункт 3). Модуль ускорения *сначала уменьшается, затем увеличивается* (рис. 2, кривая посчитана по формуле): $|F_x|$ равен 0,0133 при $x = 15$, 0 при $x = 10$ и 0,0208 при $x = 6$ (в единицах $kq^2/\text{см}^2$).

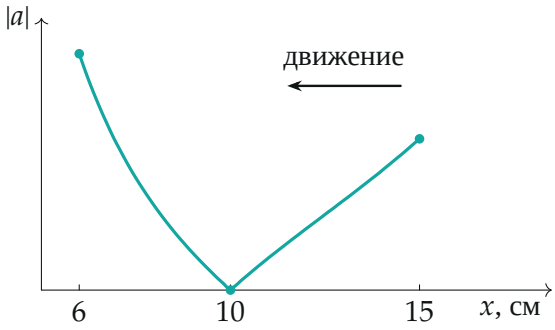


Рис. 2. Модуль ускорения на пути от середины (15 см) до точки сближения (6 см): ноль в положении равновесия 10 см

Пункт 3. Наибольшее сближение с q_2. Закон сохранения энергии бусинки (трения нет, поле потенциально): кинетическая энергия в начале

и в точке остановки равна нулю, значит, равны потенциальные энергии взаимодействия бусинки с зарядами:

$$\frac{kqq_1}{l/2} + \frac{kqq_2}{l/2} = \frac{kqq_1}{l - x_{\min}} + \frac{kqq_2}{x_{\min}}.$$

Сокращаем на kq^2, подставляем $l = 30$ см:

$$\frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{4}{30 - x} + \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{3} = \frac{4x + 30 - x}{x(30 - x)},$$

$$x^2 - 21x + 90 = 0,$$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 360}}{2} = \frac{21 \pm 9}{2},$$

$$x = 15 \text{ см (старт)}, \quad x_{\min} = 6{,}0 \text{ см}.$$

На рис. 3 — потенциальная энергия $U(x)$: бусинка «катается» в яме между точками 6 и 15 см, где U равна начальной.

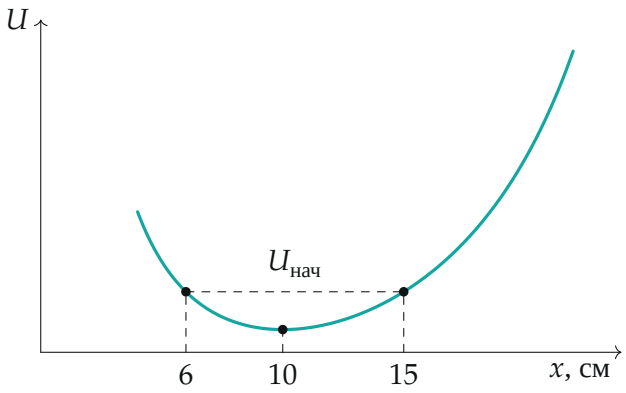


Рис. 3. Потенциальная энергия бусинки $U(x) \propto \frac{1}{x} + \frac{4}{30-x}$ (по формуле, вертикаль сдвинута): минимум в 10 см, уровень начальной энергии пересекает кривую в 6 и 15 см

Пункт 4. Наибольшее удаление от q_2. Дальняя точка остановки — второй корень того же уравнения, то есть сама точка старта: бусинка

возвращается туда, откуда её отпустили (в ней U та же, скорость ноль), и дальше не уходит:

$$x_{\max} = \frac{l}{2} = 15{,}0 \text{ см}.$$

Пункт 5. Где скорость максимальна. Полная энергия $\frac{mv^2}{2} + U(x)$ постоянна, поэтому скорость наибольшая там, где U наименьшая. Минимум U — там, где сила $F_x = -\dfrac{\Delta U}{\Delta x}$ равна нулю, то есть в положении равновесия (рис. 3):

$$x = x_0 = 10{,}0 \text{ см}.$$

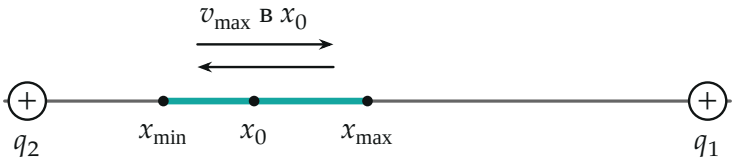


Рис. 4. Бусинка колеблется между 6 и 15 см от q_2; быстрее всего проходит положение равновесия 10 см

Обратите внимание. Колебания не симметричны относительно положения равновесия: к q_2 бусинка отходит на 4 см, к q_1 — на 5 см. Яма $U(x)$ несимметрична (рис. 3), поэтому формулами гармонических колебаний здесь пользоваться нельзя — только сохранением энергии.

Проверка. Размерность kq^2/x — энергия, kq^2/x^2 — сила. Подстановка $x_{\min} = 6$: $\frac{4}{24} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ — совпадает с левой частью. Второй способ для равновесия: $\sqrt{q_1/q_2} = 2 = (l - x_0)/x_0$ — то же $x_0 = l/3$. Предел $q_1 = q_2$: равновесие в середине, бусинка из середины не двинется — формула $x_0 = l/(1 + \sqrt{q_1/q_2}) = l/2$ это даёт.

Смысл: точки остановки — пересечения уровня полной энергии с кривой $U(x)$, а максимум скорости — на дне ямы, в положении равновесия.

Ответ. 1) $x_0 = l/3 = 10{,}0$ см; 2) сначала уменьшается, затем увеличивается; 3) 6,0 см; 4) 15,0 см; 5) 10,0 см (положение равновесия).