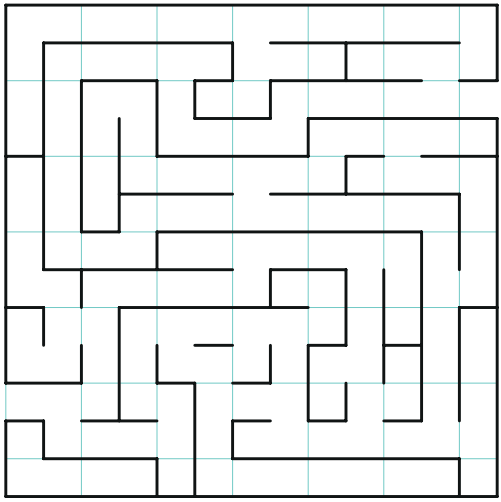
Робот в лабиринте и средняя скорость

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, пригласительный этап, 7 класс, задача 1] «Робот в лабиринте и средняя скорость».

Для соревнований в номинациях «лабиринт», «гонки преследования» и «следование по линии» семиклассник сконструировал квадратного робота со стороной 10 см, который может двигаться в трёх скоростных режимах: А — со скоростью 3 м/мин, Б — со скоростью 4 м/мин, В — со скоростью 5 м/мин.

Какое наилучшее время робот способен показать в «лабиринте» размерами 130×130 см? Временем на повороты пренебречь. Робот не пересекает внешние и внутренние границы лабиринта. Две стороны робота при движении всегда остаются параллельны прилегающим к ним сторонам лабиринта, вектор скорости параллелен двум сторонам робота и перпендикулярен двум оставшимся сторонам. Временем прохождения лабиринта считается промежуток времени, прошедший от пересечения геометрическим центром робота линии входа до пересечения линии выхода лабиринта.



1. Ответ выразите в секундах, округлите до целых.

2. В «гонках преследования» робот использовал скоростной режим Б (4 м/мин). Если бы он проходил в минуту на 0,5 м больше, то на тот же путь ему бы потребовалось на 1 минуту меньше. Сколько времени ехал робот? Ответ выразите в минутах, округлите до целых.
3. Какой путь он прошёл? Ответ выразите в метрах, округлите до целых.
4. На соревнованиях «следование по линии» робот половину пути проехал в скоростном режиме А (3 м/мин), а оставшуюся половину — в режиме Б (4 м/мин). Чему равна средняя скорость робота на всём пути? Ответ выразите в м/мин, округлите до десятых.
5. На соревнованиях «следование по линии» робот половину времени проехал в скоростном режиме А (3 м/мин), а оставшуюся половину — в режиме Б (4 м/мин). Чему равна средняя скорость робота на всём пути? Ответ выразите в м/мин, округлите до десятых.
6. На соревнованиях «следование по линии» робот половину пути проехал в скоростном режиме А (3 м/мин), половину оставшегося времени — в режиме Б (4 м/мин), а последний участок — в режиме В (5 м/мин). Чему равна средняя скорость робота на всём пути? Ответ выразите в м/мин, округлите до десятых.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равномерное движение и среднюю скорость. В лабиринте главное — найти путь центра робота: робот размером ровно в клетку, поэтому его центр всегда идёт по центрам клеток, а сам путь — число клеток, умноженное на 10 см. Во всех остальных пунктах работает одно определение: средняя скорость — весь путь, делённый на всё время.

Обозначения. $a = 10$ см — сторона клетки и робота; s — путь; t — время; $v_А = 3$, $v_Б = 4$, $v_В = 5$ м/мин; $v_{ср}$ — средняя скорость.

Пункт 1. Лабиринт. Сторона клетки: 130 см : 13 = 10 см — как раз сторона робота. Значит, робот занимает клетку целиком, коридор ему ровно впору, развернуться или сместиться вбок он не может; его центр движется по центрам клеток. Ветвлений, которые не кончались бы тупиком, в лабиринте нет, и путь от входа (слева) к выходу (справа вверху) единственный (рис. 1).

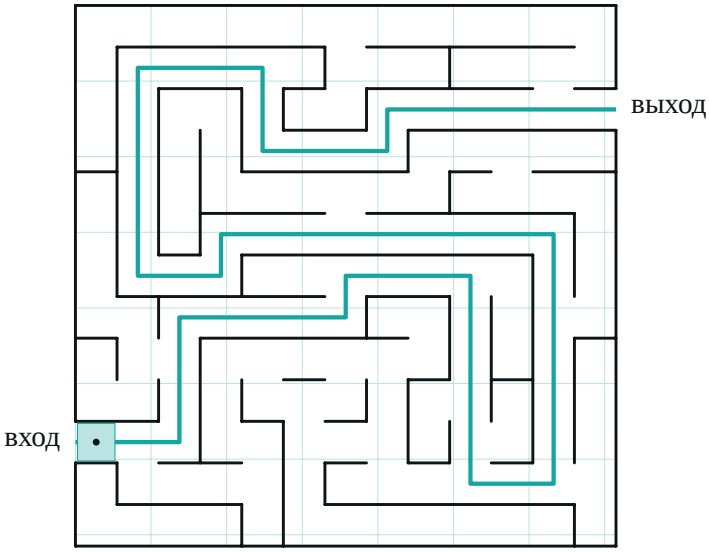


Рис. 1. Путь центра робота (бирюзой) от линии входа до линии выхода: 57 клеток по 10 см; квадрат слева — робот

Считаем длину пути центра по отрезкам ломаной (в клетках): от линии входа до центра первой клетки — $\frac{1}{2}$, затем $2+3+4+1+3+5+2+6+8+1+2+5+3+2+3+1+5=56$ и от центра последней клетки до линии выхода — ещё $\frac{1}{2}$. Итого 57 клеток:

$$s = 57\,a = 57 \cdot 0{,}1\ \text{м} = 5{,}7\ \text{м}.$$

Время наименьшее, когда скорость наибольшая — режим В, 5 м/мин:

$$t = \frac{s}{v_\text{В}} = \frac{5{,}7\ \text{м}}{5\ \text{м/мин}} = 1{,}14\ \text{мин} = 68{,}4\ \text{с} \approx 68\ \text{с}.$$

Пункт 2. Гонки преследования. Путь s один и тот же. При скорости $v_\text{Б} = 4$ м/мин робот едет время t; при скорости 4,5 м/мин — время $t - 1$ мин (рис. 2). Путь в обоих случаях — скорость, умноженная на время:

$$s = 4t = 4{,}5\,(t-1) \quad \Rightarrow \quad 0{,}5\,t = 4{,}5 \quad \Rightarrow \quad t = 9\ \text{мин}.$$

Пункт 3. Путь: $s = v_\text{Б} t = 4\ \text{м/мин} \cdot 9\ \text{мин} = 36\ \text{м}$. Проверка: 36 :

4,5 = 8 мин — действительно на минуту меньше.

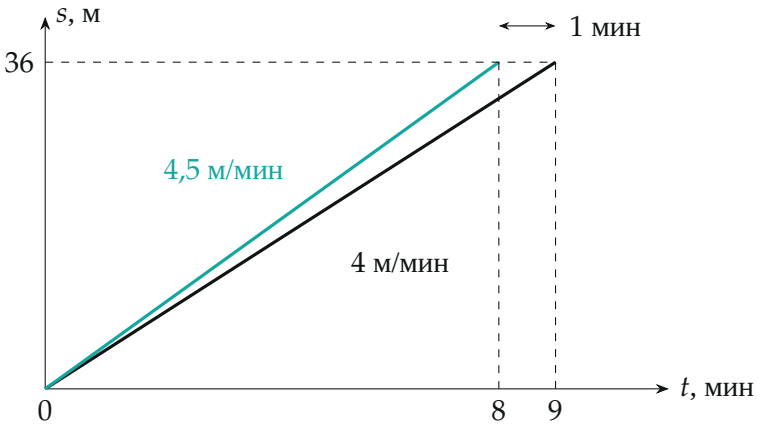


Рис. 2. Графики пути: тот же путь 36 м быстрее на 0,5 м/мин робот прошёл бы на минуту раньше

Пункт 4. Половина пути — в режиме А, половина — в режиме Б. Пусть весь путь $2s$. Время на каждой половине — путь, делённый на скорость:

$$t_1 = \frac{s}{v_А}, \qquad t_2 = \frac{s}{v_Б},$$

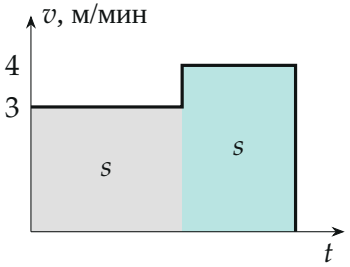
$$v_{ср} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2v_А v_Б}{v_А + v_Б} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 + 4} = \frac{24}{7} \approx 3{,}4 \text{ м/мин}.$$

Путь s сократился — ответ от длины трассы не зависит.

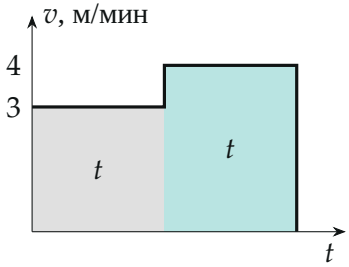
Пункт 5. Половина времени — в режиме А, половина — в режиме Б. Пусть каждая половина длится t. Пути: $v_А t$ и $v_Б t$:

$$v_{ср} = \frac{v_А t + v_Б t}{2t} = \frac{v_А + v_Б}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3{,}5 \text{ м/мин}.$$

Здесь средняя больше, чем в п. 4: при равных временах быстрый режим длится столько же, сколько медленный, а при равных путях медленный длится дольше (рис. 3).



п. 4: пути равны



п. 5: времена равны

Рис. 3. Скорость от времени; площадь под графиком — путь. Слева площади равны (равные пути), справа равны ширины (равные времена)

Пункт 6. Три режима. Первая половина пути s_1 — в режиме А. Оставшееся время делится пополам: $t_2 = t_3 = \tau$, в режимах Б и В. Пути на этих участках: $s_2 = v_\text{Б}\tau = 4\tau$, $s_3 = v_\text{В}\tau = 5\tau$. Вторая половина пути равна первой:

$$s_1 = s_2 + s_3 = 9\tau, \qquad t_1 = \frac{s_1}{v_\text{А}} = \frac{9\tau}{3} = 3\tau.$$

Весь путь $2s_1 = 18\tau$, всё время $t_1 + 2\tau = 5\tau$ (рис. 4):

$$v_\text{ср} = \frac{18\tau}{5\tau} = 3{,}6 \text{ м/мин}.$$

В общем виде $v_\text{ср} = \dfrac{2v_\text{А}(v_\text{Б} + v_\text{В})}{2v_\text{А} + v_\text{Б} + v_\text{В}}$: на второй половине пути средняя скорость $(v_\text{Б} + v_\text{В})/2 = 4{,}5$ м/мин (равные времена, как в п. 5), а дальше — равные пути, как в п. 4: $\frac{2\cdot 3\cdot 4{,}5}{3+4{,}5} = 3{,}6$ — то же.

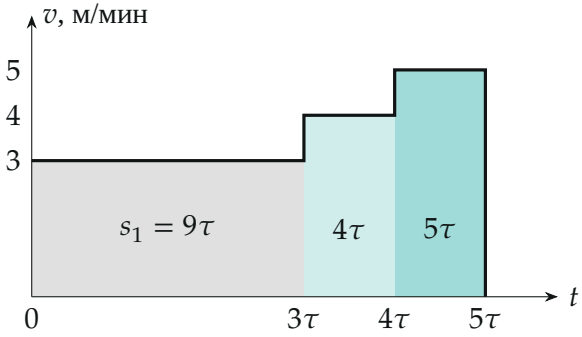


Рис. 4. Пункт 6: серая площадь (первая половина пути) равна сумме двух бирюзовых (вторая половина)

Обратите внимание. Средняя скорость — не среднее арифметическое скоростей: оно получается, только когда равны времена (п. 5); при равных путях (п. 4) средняя ближе к меньшей скорости.

Проверка. Размерности: $\frac{\text{м/мин}\cdot\text{м/мин}}{\text{м/мин}} = \text{м/мин}$. Предел: при $v_А = v_Б = v_В = v$ все три формулы дают $v_{ср} = v$. Все средние лежат между наименьшей и наибольшей скоростью: $3 < 3{,}4 < 3{,}5 < 3{,}6 < 5$. Пункт 1: 68,4 с — в зачётном интервале организаторов $[67;\ 69]$ с.

Смысл: в лабиринте считаем клетки пути центра, в остальных пунктах — весь путь делим на всё время.

Ответ. 1) $t = 57a/v_В = 68{,}4 \approx 68$ с; 2) 9 мин; 3) 36 м; 4) $\dfrac{2v_А v_Б}{v_А + v_Б} \approx 3{,}4$ м/мин; 5) $\dfrac{v_А + v_Б}{2} = 3{,}5$ м/мин; 6) $\dfrac{2v_А(v_Б + v_В)}{2v_А + v_Б + v_В} = 3{,}6$ м/мин.