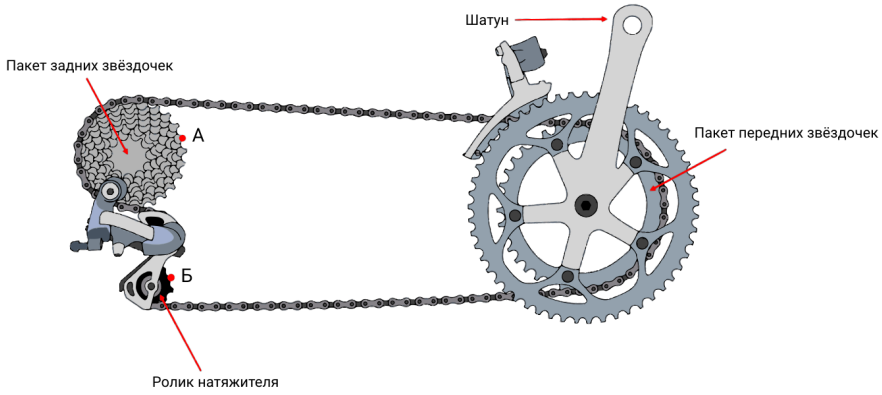
Велосипедная трансмиссия

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, пригласительный этап, 9 класс, задача 1] «Велосипедная трансмиссия».

На рисунке представлено устройство велосипедной трансмиссии. Шатун, к которому присоединяются педали, зафиксирован на пакете передних звёздочек и вращается вместе с ними относительно неподвижной оси. Одна звёздочка из пакета передних с помощью цепи соединена с одной из пакета задних. В свою очередь, пакет задних звёздочек вращается вместе с задним колесом как единое целое. Диаметр колеса $D = 29$ дюймов. Известно, что 1 дюйм $= 2{,}54$ см.

Чтобы цепь не провисала, в трансмиссии имеется ролик натяжителя. Велосипедная цепь не проскальзывает относительно звёздочек и роликов натяжителя.



Известно, что для некоторой выбранной передачи диаметр используемой передней звёздочки в $x = 1{,}5$ раза больше диаметра задней, а диаметр используемой задней звёздочки в $y = 4$ раза больше диаметра ролика натяжителя.

1. Заполните пропуски. Чтобы двигаться на велосипеде с максимальной скоростью, в передней кассете нужно выбрать … звёздочку, а в задней кассете — … звёздочку. (Варианты: самую большую, среднюю, самую маленькую, любую.)

2. Во сколько раз скорость $v_Б$ точки Б больше скорости $v_А$ точки А (на поверхности задней звёздочки)? Скорости измеряются относительно велосипеда. Ответ округлите до десятых.
3. С какой частотой n_2 вращается ролик натяжителя, если передняя звёздочка вращается с частотой $n_1 = 60$ оборотов в минуту? Ответ выразите в об/мин, округлите до целых.
4. Человек крутит педали с частотой $n_3 = 40$ оборотов в минуту. С какой скоростью относительно земли движется при этом велосипед? Считайте, что велосипед движется без проскальзывания относительно земли. Примите $\pi = 3{,}14$. Ответ выразите в м/с, округлите до десятых.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на вращательное движение и передачу цепью. Цепь нерастяжима, поэтому все её звенья движутся относительно велосипеда с одной и той же скоростью u. Цепь не проскальзывает, значит, точки на ободе каждой звёздочки и ролика, касающиеся цепи, движутся с той же скоростью u. Скорость точки обода $u = \pi D n$ (за оборот — длина окружности), поэтому частота вращения обратно пропорциональна диаметру. Колесо катится без проскальзывания: нижняя точка покоится относительно земли, и велосипед едет со скоростью точки обода колеса относительно велосипеда.

Обозначения. D_1, D_2, D_3 — диаметры передней звёздочки, задней звёздочки и ролика: $D_1 = xD_2$, $D_2 = yD_3$; n — частоты вращения (об/мин); u — скорость цепи относительно рамы; v — скорость велосипеда; $n_к$ — частота вращения заднего колеса.

Пункт 1. Выбор звёздочек. Скорость велосипеда $v = \pi D n_к$, а колесо вращается с задней звёздочкой. Скорость цепи одна: $\pi D_1 n_1 = \pi D_2 n_к$, откуда

$$n_к = \frac{D_1}{D_2}\, n_1, \qquad v = \pi D\, \frac{D_1}{D_2}\, n_1.$$

При заданной частоте педалей v тем больше, чем больше D_1 и чем меньше D_2: спереди — *самую большую* звёздочку, сзади — *самую маленькую* (рис. 1).

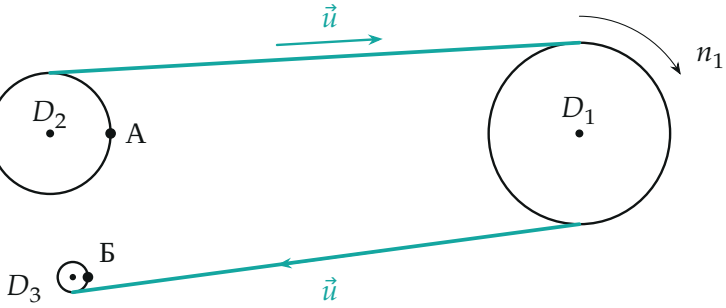


Рис. 1. Схема передачи: передняя звёздочка D_1, задняя D_2, ролик натяжителя D_3; все звенья цепи движутся относительно рамы с одной скоростью u

Пункт 2. Отношение $v_Б/v_A$. Точка А — на ободе задней звёздочки, Б — на ободе ролика. Обе касаются цепи и не проскальзывают по ней, поэтому относительно велосипеда обе движутся со скоростью цепи u:

$$\frac{v_Б}{v_A} = \frac{u}{u} = 1{,}0.$$

Ролик в 4 раза меньше, но и вращается в 4 раза быстрее — линейная скорость его обода та же.

Пункт 3. Частота вращения ролика. Скорость обода передней звёздочки и ролика одна — u:

$$\pi D_1 n_1 = \pi D_3 n_2,$$

$$n_2 = \frac{D_1}{D_3} n_1 = xy\, n_1 = 1{,}5 \cdot 4 \cdot 60 \text{ об/мин} = 360 \text{ об/мин}$$

($D_1/D_3 = (D_1/D_2)(D_2/D_3) = xy = 6$). Цепочка частот — на рис. 2.

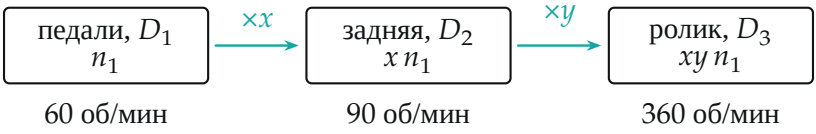


Рис. 2. Частота растёт во столько раз, во сколько уменьшается диаметр (скорость цепи одна)

Пункт 4. Скорость велосипеда. Частота педалей (и передней звёздочки) $n_З = 40$ об/мин $= \frac{40}{60}$ об/с. Задняя звёздочка вместе с колесом вращается в x раз чаще:

$$n_к = x\, n_З = 1{,}5 \cdot \frac{40}{60}\ \text{об/с} = 1{,}0\ \text{об/с}.$$

Качение без проскальзывания: нижняя точка колеса покоится относительно земли, значит, её скорость относительно рамы $\pi D n_к$ (назад) равна скорости земли относительно велосипеда, и велосипед едет вперёд с той же скоростью (рис. 3). $D = 29 \cdot 2{,}54$ см $= 73{,}66$ см:

$$v = \pi D\, n_к = 3{,}14 \cdot 0{,}7366 \cdot 1{,}0\ \text{м/с} = 2{,}31\ \text{м/с} \approx 2{,}3\ \text{м/с}.$$

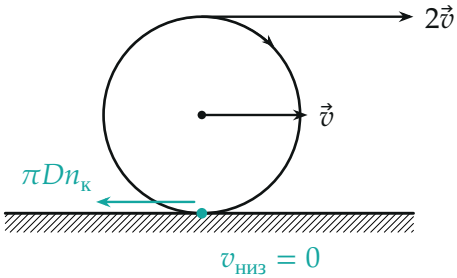


Рис. 3. Качение без проскальзывания: относительно рамы нижняя точка обода движется назад со скоростью $\pi D n_к$, относительно земли она покоится — значит, рама едет вперёд с $v = \pi D n_к$

Скорость пропорциональна частоте педалей: $v = x\pi D\, n_З$, на рис. 4 — прямая по формуле.

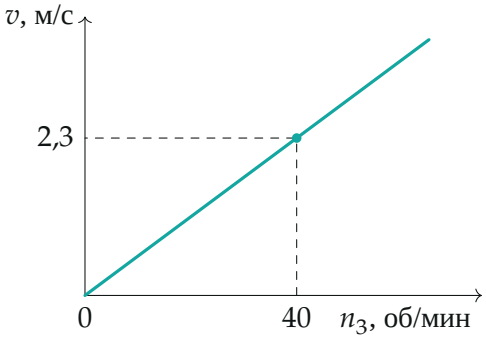


Рис. 4. Скорость велосипеда растёт пропорционально частоте вращения педалей (передача $x = 1{,}5$)

Обратите внимание. Ролик натяжителя на скорость велосипеда не влияет: он лишь направляет цепь. И в пункте 2 спрашивают о линейной скорости точек, а не о частоте: частоты различаются в 4 раза, скорости — нет.

Проверка. Размерность: м·об/с = м/с. Второй способ для пункта 4: за один оборот педалей велосипед проезжает $x\pi D = 1{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}7366 = 3{,}47$ м, за секунду — $\frac{2}{3}$ оборота, $3{,}47 \cdot \frac{2}{3} = 2{,}31$ м/с — совпадает. Предел $x = 1$: колесо вращается с частотой педалей, $v = \pi D n_3 = 1{,}54$ м/с — медленнее, как и должно быть.

Смысл: цепь задаёт одну линейную скорость всем ободам, а частоты обратно пропорциональны диаметрам; скорость велосипеда — скорость обода колеса.

Ответ. 1) спереди — самую большую, сзади — самую маленькую; 2) $v_Б/v_А = 1{,}0$; 3) $n_2 = xy\, n_1 = 360$ об/мин; 4) $v = x\pi D n_3 \approx 2{,}3$ м/с.