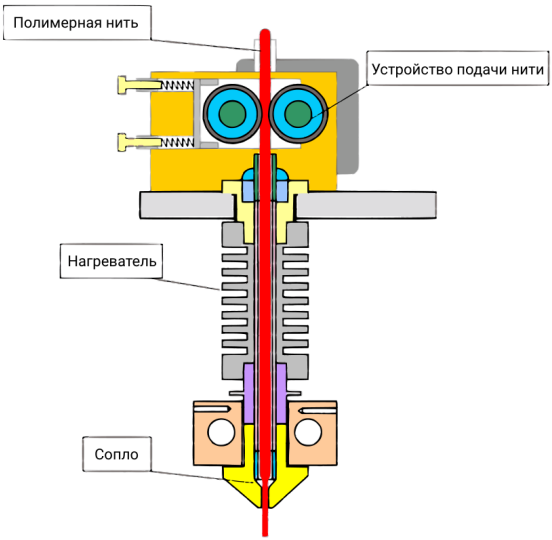
Печатающая головка 3D-принтера

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, пригласительный этап, 9 класс, задача 2] «Печатающая головка 3D-принтера».

Печатающая головка 3D-принтера устроена следующим образом: специальный полимерный (пластиковый) шнур при помощи двух вращающихся валиков подаётся в нагреватель. В нём шнур разогревается до температуры, при которой из твёрдого он становится вязким и пластичным. После чего полимер выдавливается через металлическое сопло на рабочий стол принтера, где, застывая, опять отвердевает.



1. Определите массу единицы длины шнура (погонную плотность), если известно, что кусок шнура длиной $L = 210$ м имеет массу $m = 1000$ г. Ответ выразите в г/м, округлите до сотых.
2. На нагревательный элемент подаётся напряжение $U = 24$ В. Какая сила тока протекает через нагреватель, если его мощность $P = 40$ Вт? Ответ выразите в амперах, округлите до сотых.
3. С какой скоростью выдавливается полимерный шнур из сопла, если в нагреватель он подаётся со скоростью $v = 10$ мм/с? Диа-

метр шнура $D = 1{,}75$ мм, а диаметр сопла d, из которого выдавливается нагретый полимер, равен 0,4 мм. Можно считать, что плотность материала при нагреве не изменяется. Ответ выразите в мм/с, округлите до целых.

4. Чему равен КПД нагревательного элемента, если он нагревает полимерную нить от начальной температуры 20 °C до температуры 380 °C за то время, пока нить доходит до сопла через нагреватель? Внутри нагревателя пластик только разогревается и становится пластичным, процесс плавления не происходит. Удельная теплоёмкость полимерной нити 1,4 Дж/(г·°C). Остальные данные можно взять из предыдущих вопросов. Ответ выразите в процентах, округлите до целых.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на поток вещества и тепловой баланс. Пластик через головку идёт непрерывным потоком: сколько его входит за секунду, столько и выходит, — в этом весь пункт 3 (уравнение неразрывности). А в пункте 4 удобно считать не «за время прохождения нити», а за одну секунду: каждую секунду в нагреватель входит отрезок шнура длиной $v \cdot 1$ с, и его нужно нагреть на 360 °C, пока нагреватель отдаёт 40 Дж.

Обозначения. μ — погонная плотность шнура; I — ток; u — скорость полимера в сопле; $c = 1{,}4$ Дж/(г·°C); $\Delta t = 380 - 20 = 360$ °C; τ — время; η — КПД нагревателя.

1. Погонная плотность — масса единицы длины:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{1000\text{ г}}{210\text{ м}} \approx 4{,}76\text{ г/м}.$$

2. Ток через нагреватель. Мощность тока $P = UI$ (рис. 1), отсюда

$$I = \frac{P}{U} = \frac{40\text{ Вт}}{24\text{ В}} \approx 1{,}67\text{ А}.$$

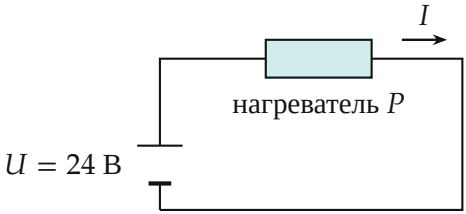


Рис. 1. Цепь нагревателя: источник U и нагревательный элемент мощностью $P = UI$

3. Скорость полимера в сопле. Масса пластика, вошедшего в головку за время τ, равна массе, вышедшей из сопла за то же время (пластик нигде не копится). Плотность при нагреве не меняется, значит, равны и объёмы. За время τ шнур входит на длину $v\tau$, то есть объёмом $\frac{\pi D^2}{4} v\tau$; из сопла выходит столбик длиной $u\tau$ и объёмом $\frac{\pi d^2}{4} u\tau$ (рис. 2):

$$\frac{\pi D^2}{4} v\tau = \frac{\pi d^2}{4} u\tau \quad \Rightarrow \quad u = v\frac{D^2}{d^2} = 10\cdot\frac{1{,}75^2}{0{,}4^2} = 10\cdot 19{,}14 \approx 191 \text{ мм/с}.$$

Сечение сопла в 19 раз меньше сечения шнура — во столько же раз быстрее движется пластик.

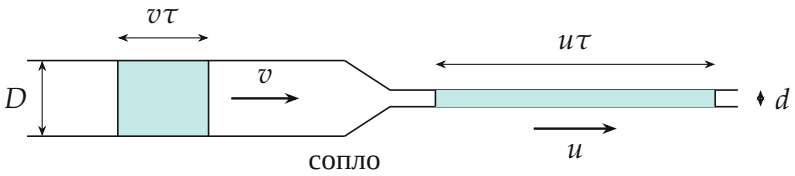


Рис. 2. Объёмы, прошедшие за одно и то же время τ через шнур и через сопло, равны (бирюзой): короткий толстый цилиндр и длинный тонкий

4. КПД нагревателя. КПД — доля затраченной энергии, ушедшая на полезное дело. Полезное — нагрев пластика, затраченное — работа тока. Возьмём время τ. За него через нагреватель проходит шнур длиной $v\tau$ массой $\mu v\tau$; каждый его кусочек, пройдя нагреватель, нагрет от 20 до 380 °C. Теплота на нагрев и работа тока:

$$Q_{\text{пол}} = c\,\mu v\tau\,\Delta t, \qquad A = P\tau, \qquad \eta = \frac{Q_{\text{пол}}}{A} = \frac{c\,\mu v\,\Delta t}{P}.$$

Время τ сократилось. В единицах г, м, с: $\mu v = 4{,}76$ г/м $\cdot$ 0,01 м/с $=$ 0,0476 г/с — столько пластика нагревается каждую секунду:

$$\eta = \frac{1{,}4 \cdot 0{,}0476 \cdot 360}{40} = \frac{24{,}0\ \text{Вт}}{40\ \text{Вт}} = 0{,}60 = 60\,\%.$$

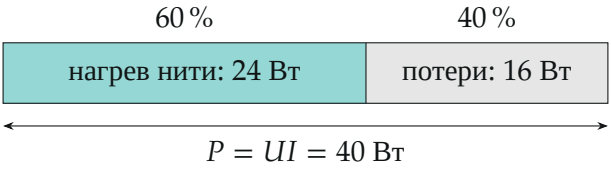


Рис. 3. Куда уходит мощность нагревателя: на нагрев нити — $c\mu v\Delta t = 24$ Вт из 40

Обратите внимание. Время, «пока нить доходит до сопла», знать не нужно: и полезная теплота, и работа тока пропорциональны времени, поэтому КПД — отношение мощностей.

Проверка. Размерности: $\frac{\text{Дж}/(\text{г}\cdot{}^\circ\text{C})\cdot\text{г}/\text{м}\cdot\text{м}/\text{с}\cdot{}^\circ\text{C}}{\text{Вт}} = \frac{\text{Дж}/\text{с}}{\text{Вт}} = 1$; $v\frac{D^2}{d^2}$ — мм/с. Предел: при $d = D$ сопло не сужает поток, $u = v$. Второй способ для п. 4: метр шнура (4,76 г) требует $1{,}4 \cdot 4{,}76 \cdot 360 = 2400$ Дж и проходит за 100 с, когда нагреватель отдаёт 4000 Дж; $2400/4000 = 60\,\%$ — то же.

Смысл: поток вещества непрерывен — узкое место пластик проходит быстрее; КПД нагревателя — отношение «полезной» мощности $c\mu v\Delta t$ к мощности тока.

Ответ. 1) $\mu = m/L \approx 4{,}76$ г/м; 2) $I = P/U \approx 1{,}67$ А; 3) $u = vD^2/d^2 \approx$ 191 мм/с; 4) $\eta = c\mu v\Delta t/P = 60\,\%$.