Дракончики на ватрушках

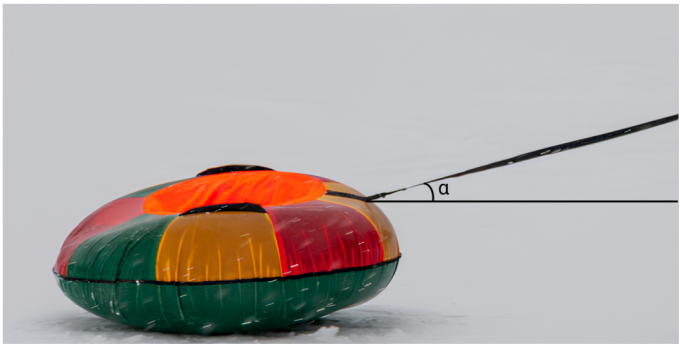
Задача 3. [ВсОШ 2025/26, пригласительный этап, 9 класс, задача 3] «Дракончики на ватрушках».

Неугомонные дракончики Вжих и Пых решили покататься на ватрушках по снежным горкам. И всё бы было огонь, если бы их другу Вико не задали в этот день лабораторную работу по изучению силы трения. Первым делом Вико взвесил всех участников «покатушек». Выяснилось, что масса Вжиха равна $M_1 = 30$ кг, а вот Пых поднабрал и весы показали, что его масса $M_2 = 45$ кг. Также выяснилось, что их ватрушки одинаковые и имеют массу $m = 2$ кг каждая. Во втором эксперименте было установлено, что для перемещения пустой ватрушки по горизонтальной части горки к ней необходимо прикладывать горизонтальную силу F не менее 4,1 Н. Считайте, что коэффициент трения ватрушки о всю поверхность горки является постоянным, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Помогите Вико правильно ответить на вопросы и получить пятёрку.

1. Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить, чтобы сдвинуть ватрушку с сидящим на ней Пыхом, если всё происходит на горизонтальном участке горки? Ответ выразите в ньютонах, округлите до десятых.
2. Чему равен коэффициент трения ватрушки о снег? Ответ округлите до сотых.
3. Вжих и Пых решили провести парочку мини-соревнований, договорившись, что помогать крыльями, лапами, дышать огнём и т. д. категорически запрещено. По условиям первого соревнования, названного «Кто дальше?», они разгоняются до одинаковой скорости $v = 5$ м/с, запрыгивают на ватрушки и скользят на них, пока не остановятся. Соревнование проводится на горизонтальном участке. Во сколько раз путь, пройденный до остановки Пыхом, будет больше пути, пройденного Вжихом? Ответ округлите до сотых.
4. Во втором соревновании «Кто быстрее?» оба участника стартуют на ватрушках с вершины крутой горки. Начальная скорость должна быть равна нулю. Во сколько раз быстрее Пых спустится с гор-

ки по сравнению с Вжихом? Упрощённо считайте горку прямой. Длина горки $L = 180$ м, горка наклонена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Ответ округлите до сотых.

5. Когда участникам весёлых «покатушек» пришлось затаскивать ватрушки на горку, возник спор: зависит ли сила, которую необходимо прикладывать к ватрушке для её перемещения, от угла α, под которым натянут трос? Проведя серию экспериментов, удалось выяснить, что сила зависит от угла. Был определён угол наклона троса к горизонту, оптимальный для того, чтобы тянуть пустую ватрушку по горизонтальному участку горки, прикладывая наименьшую силу. Чему оказался равен этот угол? Ответ выразите в градусах, округлите до целых.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на силу трения скольжения $F_{тр} = \mu N$ и второй закон Ньютона. Опыт с пустой ватрушкой даёт коэффициент трения. Дальше главное наблюдение: и тормозящая сила трения, и скатывающая сила тяжести пропорциональны массе, поэтому ускорение от массы не зависит — тяжёлый и лёгкий дракончики едут одинаково. В последнем пункте трос, потянутый вверх, ещё и «приподнимает» ватрушку, уменьшая силу нормальной реакции и трение; оптимальный угол — баланс между этим выигрышем и потерей горизонтальной составляющей силы.

Обозначения. $F_0 = 4{,}1$ Н — наименьшая сила для пустой ватрушки; μ — коэффициент трения; N — сила нормальной реакции; M — масса

дракончика с ватрушкой; a — ускорение; β — угол троса к горизонту в п. 5 (в условии он тоже назван α, но эта буква уже занята углом горки).

1–2. Трение и коэффициент трения. Чтобы сдвинуть ватрушку, тянущая сила должна сравняться с наибольшей силой трения покоя, равной силе трения скольжения μN. Второй закон Ньютона для ватрушки в проекциях (рис. 1): по вертикали $N - Mg = 0$, по горизонтали на пороге сдвига ($a = 0$) $F - \mu N = 0$. Значит, $F = \mu Mg$ — сила пропорциональна массе. Для пустой ватрушки ($M = m$) и для ватрушки с Пыхом ($M = M_2 + m$):

$$F_0 = \mu m g, \qquad F = \mu(M_2+m)g \quad \Rightarrow \quad F = F_0\,\frac{M_2+m}{m} = 4{,}1\cdot\frac{47}{2} \approx 96{,}4\ \text{Н},$$

$$\mu = \frac{F_0}{mg} = \frac{4{,}1}{2\cdot 10} = 0{,}205 \approx 0{,}21.$$

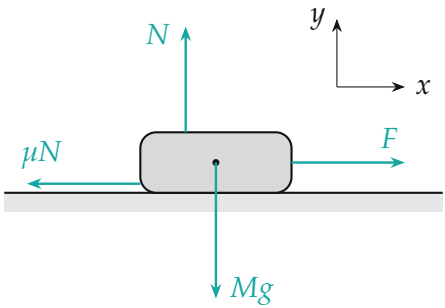


Рис. 1. Ватрушка на горизонтальном участке на пороге сдвига: тянущая сила равна трению скольжения $\mu N = \mu Mg$

3. «Кто дальше?» После прыжка на ватрушку дракончик с ватрушкой (масса M) тормозится только трением. Второй закон Ньютона в проекции на направление движения: $Ma = -\mu Mg$, откуда $a = -\mu g$ — масса сократилась. Путь до остановки при равнозамедленном движении $s = \dfrac{v^2}{2\mu g}$ одинаков для обоих:

$$\frac{s_2}{s_1} = 1{,}00 \qquad \left(s = \frac{25}{2\cdot 0{,}205\cdot 10} \approx 6{,}1\ \text{м у каждого}\right).$$

4. «Кто быстрее?» На склоне (рис. 2) ось x — вдоль склона вниз, y — перпендикулярно. Проекция на y: $N - Mg\cos\alpha = 0$, то есть $N = Mg\cos\alpha$. Проекция на x: $Ma = Mg\sin\alpha - \mu N = Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha$. Масса снова сокращается:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 10\,(0{,}866 - 0{,}205\cdot 0{,}5) \approx 7{,}64\ \text{м/с}^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} \approx 6{,}9\ \text{с}.$$

Время спуска у Пыха и Вжиха одинаково, отношение времён 1,00.

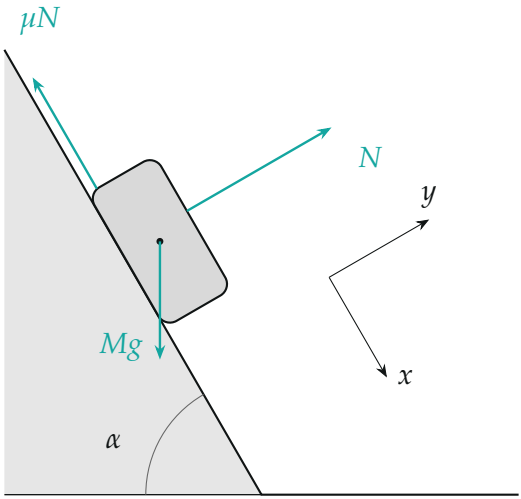


Рис. 2. Спуск с горки: вдоль склона — скатывающая $Mg\sin\alpha$ против трения $\mu Mg\cos\alpha$; обе пропорциональны массе

5. Оптимальный угол троса. Пусть трос тянет пустую ватрушку с силой F под углом β к горизонту (рис. 3). Проекция второго закона Ньютона на вертикаль: $N + F\sin\beta - mg = 0$, то есть $N = mg - F\sin\beta$ — трос частично снимает вес со снега, и трение уменьшается. На горизонталь, на пороге движения: $F\cos\beta - \mu N = 0$:

$$F\cos\beta = \mu(mg - F\sin\beta) \quad\Rightarrow\quad F(\beta) = \frac{\mu mg}{\cos\beta + \mu\sin\beta}.$$

Сила наименьшая, когда знаменатель наибольший. Введём угол φ с $\operatorname{tg}\varphi = \mu$; тогда $\mu = \sin\varphi / \cos\varphi$ и

$$\cos\beta + \mu\sin\beta = \frac{\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\beta-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Косинус наибольший (равен 1) при $\beta = \varphi$:

$$\beta_{\text{опт}} = \operatorname{arctg}\mu = \operatorname{arctg}0{,}205 \approx 11{,}6^\circ \approx 12^\circ,$$

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx 4{,}02\ \text{Н}.$$

Выигрыш небольшой — около 2 % от 4,1 Н; график $F(\beta)$ по вычисленным точкам — на рис. 4.

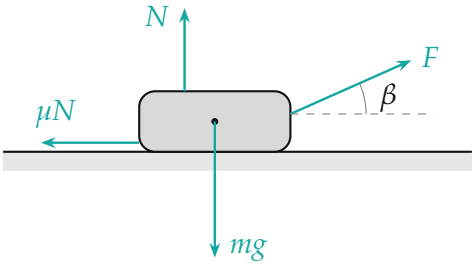


Рис. 3. Трос под углом β: вертикальная составляющая $F\sin\beta$ уменьшает прижимающую силу N, а с ней и трение

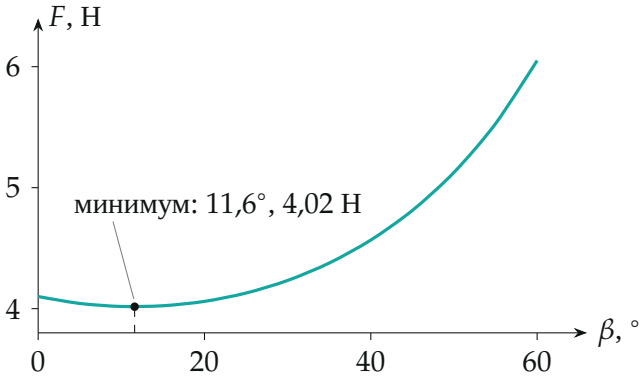


Рис. 4. Сила, нужная для равномерного движения пустой ватрушки, от угла троса: минимум при $\operatorname{tg}\beta = \mu$*, при больших углах сила быстро растёт*

Обратите внимание. Ответ п. 4 — 1,00, хотя Пых тяжелее: в отсутствие сопротивления воздуха время спуска от массы не зависит. Тянуть ватрушку выгоднее не горизонтально, а под небольшим углом, но не круче: при больших β теряется горизонтальная составляющая.

Проверка. Размерности: $\mu = F_0/(mg)$ безразмерен; $\sqrt{2L/a}$ — секунды. Предел: при $\mu \to 0$ оптимальный угол $\beta \to 0$ — без трения тянуть надо горизонтально. Второй способ для п. 5: по точкам рис. 4 $F(10^\circ) = 4{,}018$, $F(15^\circ) = 4{,}024$ Н, минимум между ними, у $11{,}6^\circ$ — то же. Горка: $\operatorname{tg} 60^\circ = 1{,}73 > \mu$, ватрушки действительно скатываются.

Смысл: сила трения и сила тяжести пропорциональны массе, поэтому в соревнованиях на ватрушках масса не решает ничего.

Ответ. 1) $F = F_0(M_2 + m)/m \approx 96{,}4$ Н; 2) $\mu = F_0/(mg) \approx 0{,}21$; 3) 1,00; 4) 1,00; 5) $\beta = \operatorname{arctg}\mu \approx 12^\circ$.