Пружина на весах

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 10 класс, задача 1 (практический тур)] «Пружина на весах».

Оборудование. Пружина «Slinky», электронные весы, деревянная линейка 40 см, деревянная линейка 20 см, 2 деревянных прямоугольных бруска, малярный скотч, миллиметровая бумага для графиков.

Задание. Запишите номер установки.

1. Измерьте зависимость веса пружины P, установленной на весы одним из оснований, от вертикальной координаты x верхнего витка пружины. Полученные данные представьте в виде: $\Delta P = P - P_0$, где P_0 — вес всей пружины, и $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — вертикальная координата верхнего витка пружины, когда вся пружина покоилась на весах.
2. Предложите теоретическую зависимость $\Delta P(\Delta x)$ для большого числа витков, которые изменили своё положение.
3. На основании полученных данных пункта 1 с помощью графика проверьте соответствие теории и эксперимента.
4. Используя результаты пунктов 2 и 3, определите коэффициент жёсткости одного витка пружины и оцените его погрешность.
5. Оцените момент силы, создаваемый пружиной при повороте одного её конца относительно другого на один оборот вокруг оси симметрии цилиндрической части пружины. Опишите свой метод.

Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Проверьте выданную вам пружину: не должно быть слипшихся витков, все витки должны быть ровными и в нерастянутом состоянии плотно прилегать друг к другу.

▲ **Решение. Что происходит.** Экспериментальная задача на закон Гука для пружины с массой. Пока пружина стоит на весах, витки лежат друг на друге. Поднимаем верхний виток — часть витков отрывается от весов и повисает. Каждый зазор между витками растягивается весом витков, висящих под ним: чем ниже, тем меньше. Весы теряют вес оторвавшихся витков. Связь между потерей веса и подъёмом и даёт жёсткость од-

ного витка.

Обозначения (рис. 2). m — масса витка, k — жёсткость одного витка (одного зазора между соседними витками); n — число витков, оторвавшихся от весов; $M = 20{,}37$ г — масса пружины, $N = 37$ — число витков, $m = M/N = 0{,}551$ г.

1. Измерение (рис. 1). Линейку 40 см скотчем крепим вертикально к бруску. Ко второму бруску крепим горизонтально линейку 20 см: ею цепляем верхний виток. Нижний виток стоит на весах. Прижимая второй брусок к первому, поднимаем его ступенями по 5 мм и записываем x по вертикальной линейке и показание весов $m_в$ (в граммах); $|\Delta P| = (M - m_в)g$. Пружина не должна сползать с чаши весов.

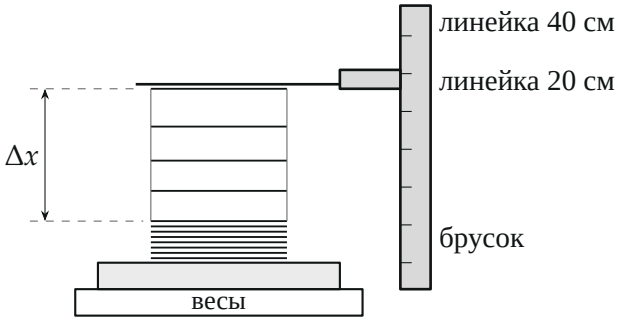

Рис. 1. Установка: нижние витки лежат на весах, верхние висят на горизонтальной линейке, подъём Δx — по вертикальной.

Измерения (авторская установка):

Δx, мм	0	8	13	18	23	28	33	38
$\lvert\Delta P\rvert$, мН	0	49	68	78	89	103	113	120
Δx, мм	43	48	53	58	63	68	73	78
$\lvert\Delta P\rvert$, мН	129	135	140	149	156	159	166	169
Δx, мм	83	88	93	98	103	108	113	
$\lvert\Delta P\rvert$, мН	176	179	186	193	196	199	200	

При $\Delta x = 113$ мм весы показывают ноль: оторвалась вся пружина, $|\Delta P| = Mg = 200$ мН.

2. Теория. Висят n витков, считаем сверху $i = 1, \dots, n$. Под i-м витком висят ещё $n - i$ витков (нижние из оторвавшихся). Условие равновесия этой нижней части: зазор под i-м витком тянет её вверх с силой $mg(n-i)$. По закону Гука для одного зазора его удлинение

$$\Delta x_i = \frac{mg(n-i)}{k}.$$

Подъём верхнего витка — сумма удлинений всех зазоров:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{mg(n-i)}{k} = \frac{mg}{k} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{mgn^2}{2k} \qquad (n \gg 1).$$

Весы потеряли вес оторвавшихся витков: $|\Delta P| = mgn$. Исключаем n:

$$(\Delta P)^2 = 2kmg\,\Delta x, \qquad |\Delta P| = \sqrt{2kmg}\,\sqrt{\Delta x}.$$

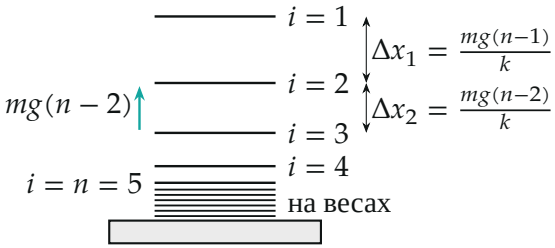

Рис. 2. Оторвались $n = 5$ витков (зазоры в масштабе $4:3:2:1$). Зазор под i-м витком держит $n - i$ витков под ним, поэтому зазоры сверху вниз сужаются.

3. Проверка графиком. Строим $(\Delta P)^2$ от Δx (рис. 3) и $|\Delta P|$ от $\sqrt{\Delta x}$ (рис. 4). Обе зависимости по точкам — прямые, теория подтверждается. МНК (python): $(\Delta P)^2 = \beta_1 \Delta x + c$, $\beta_1 = 0{,}369$ Н^2/м, $c = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Н^2 (практически ноль); $|\Delta P| = \beta_2 \sqrt{\Delta x}$, $\beta_2 = 0{,}609$ Н/м$^{1/2}$.

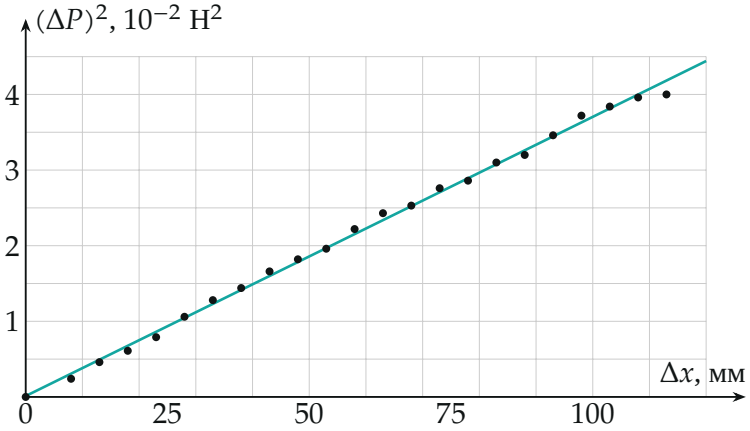

Рис. 3. $(\Delta P)^2$ *от* Δx*: прямая МНК, наклон* $\beta_1 = 0{,}369$ $Н^2/м$.

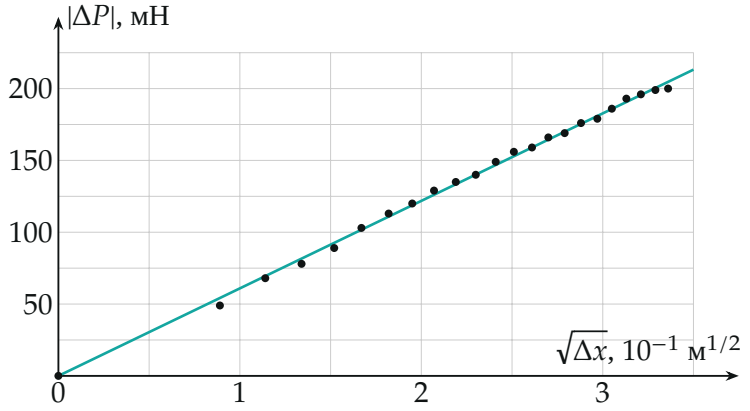

Рис. 4. $|\Delta P|$ *от* $\sqrt{\Delta x}$*: прямая через начало координат, наклон* $\beta_2 = 0{,}609$ $Н/м^{1/2}$.

4. Жёсткость витка. Из теории $\beta_1 = 2kmg$:

$$k = \frac{\beta_1}{2mg} = \frac{0{,}369}{2 \cdot 0{,}551 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} \approx 34{,}2 \text{ Н/м}.$$

По второму графику $k = \beta_2^2/(2mg) = 34{,}4$ Н/м — согласуется. Погрешность: $\dfrac{\Delta k}{k} = \dfrac{\Delta \beta_1}{\beta_1} + \dfrac{\Delta m}{m}$. Масса известна точно ($\Delta M = 0{,}01$ г, N сосчитано), главное — наклон: если брать для подгонки разные участки (только

первые или только последние точки), k меняется от 32,7 до 36,5 Н/м, то есть $\approx 5\%$. Итог

$$k = (34{,}2 \pm 1{,}8)\ \text{Н/м}.$$

5. Момент при закручивании (рис. 5). Один виток скотчем крепим к концу линейки 40 см, пружину кладём боком на стол так, чтобы линейка была в вертикальной плоскости, а её свободный край лежал на весах; бруски по бокам в 2–3 мм не дают линейке упасть. Обнуляем весы и закручиваем свободный конец пружины на один оборот. Пружина поворачивает линейку вокруг оси пружины; весы давят на край линейки силой $m_в g$ на плече l. Правило моментов для линейки относительно оси пружины:

$$M = m_в g l = 2{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}41 \approx 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Это оценка (одно измерение, трение о стол), погрешность не считаем.

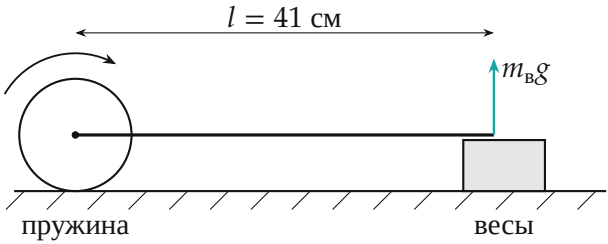

Рис. 5. Вид вдоль оси пружины: линейка прикреплена к витку и опирается краем на весы. Закрученная пружина давит линейкой на весы; $M = m_в g l$.

Обратите внимание. k здесь — жёсткость *одного* зазора между витками, а не всей пружины: вся пружина из $N - 1$ зазоров жёсткостью $k/(N-1) \approx 1$ Н/м. И формула $(\Delta P)^2 \propto \Delta x$ верна при $n \gg 1$; поправка $n(n-1)$ вместо n^2 даёт малый свободный член c в первом графике.

Проверка. Размерность: $\beta_1/(mg)$ — $\text{Н}^2/\text{м}/\text{Н} = \text{Н/м}$. Предел: оторвалась вся пружина ($n = N$) — по теории $\Delta x = \frac{mgN^2}{2k} = \frac{MgN}{2k} = \frac{0{,}2 \cdot 37}{2 \cdot 34{,}2} \approx 0{,}108$ м; измерено, что весы обнулились при $\Delta x \approx 110$ мм — согласуется.

Смысл: под собственным весом пружина растягивается неравномерно — верхние зазоры сильнее нижних, отсюда корень, а не прямая пропорциональность.

Ответ. 1) таблица $|\Delta P|(\Delta x)$; 2) $(\Delta P)^2 = 2kmg\,\Delta x$; 3) графики $(\Delta P)^2(\Delta x)$ и $|\Delta P|(\sqrt{\Delta x})$ линейны; 4) $k = (34{,}2 \pm 1{,}8)$ Н/м; 5) $M \approx 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ Н·м.