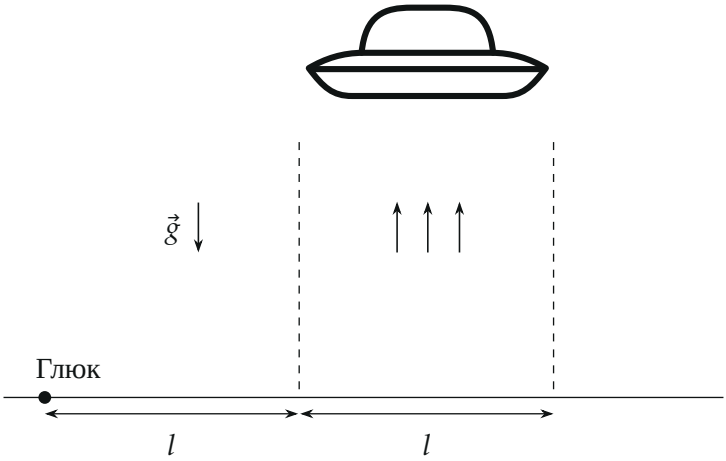
Опять 45?

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Опять 45?».

В фантастических фильмах иногда показывают, как НЛО захватывает тела на земле с помощью «притягивающего луча» (англ. «tractor beam»). Предположим, он устроен таким образом, что в небольшой вертикальной области пространства на любое произвольное тело массой m со стороны него действует сила $\vec{F}_{\text{тб}} = -2m\vec{g}$, направленная противоположно силе тяжести и вдвое превосходящая её по модулю (сила тяжести действовать, разумеется, не перестаёт). Экспериментатору Глюку приснилось, что он оказался на расстоянии l от такой области, ширина которой тоже l (см. рисунок).



1. С какой минимальной скоростью v_{m1} Глюк должен бросить камень с поверхности земли, чтобы он достиг притягивающего луча?
2. С какой минимальной скоростью v_{m2} Глюк должен бросить камень, чтобы он пролетел область, ограниченную лучом, насквозь?
3. Какова максимальная дальность броска L_{m2}, если начальная скорость камня равна v_0 ($v_0 \geqslant v_{m2}$)?
4. Найдите максимальную дальность броска L_{m3} в случае $v_0 = v_{m2}$.

Считайте, что камень не отскакивает от земли, а НЛО находится так высоко, что камень ни при каких условиях не может в него попасть. Поверхность земли горизонтальна. Ускорение свободного падения g.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на кинематику движения с постоянным ускорением — по кусочкам. Вне луча камень летит с ускорением $\vec{g}$, внутри — с ускорением $\vec{g} - 2\vec{g} = -\vec{g}$: «гравитация наоборот». Горизонтальная скорость нигде не меняется. Главная идея — симметрия: внутри луча камень проходит ту же параболу, что и до входа, но отражённую центрально относительно точки входа. Отсюда условие пролёта и скорость на выходе.

Обозначения. Ось x — горизонтально от Глюка к лучу, ось y — вверх, начало — у Глюка; α — угол броска к горизонту; границы луча $x = l$ (граница 1) и $x = 2l$ (граница 2); h — высота камня на границе 1, H — наибольшая высота подъёма до луча.

Пункт 1. До луча камень летит как обычное тело, брошенное под углом. Дальность полёта при броске с земли

$$l_0 = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

наибольшая при $\alpha = 45°$. Камень долетит до луча (упадёт ровно на границу), если $v_0^2/g = l$:

$$v_{m1} = \sqrt{gl}.$$

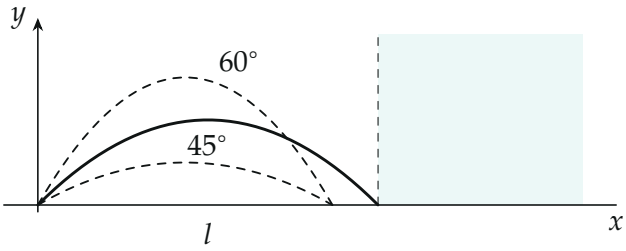


Рис. 1. Броски со скоростью $\sqrt{gl}$: под 45° (сплошная) камень падает ровно на границу луча, под 30° и 60° (пунктир) — раньше, на 0,87 l.

Пункт 2.

1. Движение в луче — центральная симметрия. Пусть при входе в луч скорость камня $(v_x,\ v_y)$. Через время t после входа (ускорение $+g$ по оси y) смещение от точки входа $\left(v_x t,\ v_y t + \frac{gt^2}{2}\right)$. За время t *до* входа (ускорение $-g$) камень был смещён от точки входа на $\left(-v_x t,\ -v_y t - \frac{gt^2}{2}\right)$ — ровно на противоположный вектор. Значит, траектория в луче — центральное отражение траектории до входа относительно точки входа $(l,\ h)$ (рис. 2). Горизонтальная скорость одна и та же, поэтому оба участка ширины l камень проходит за одно время.

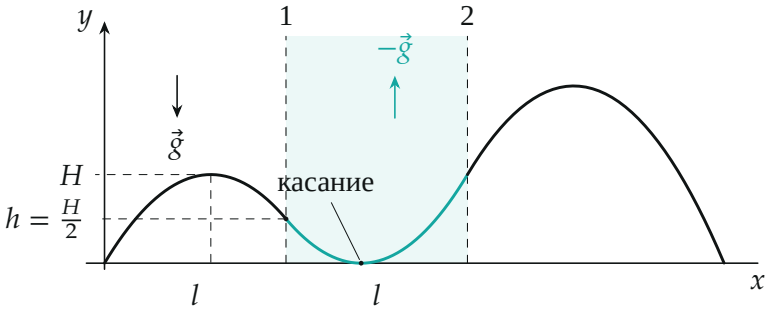


Рис. 2. Критический бросок $v_0 = v_{m2}$, $\alpha = 45°$ (построено по формулам). В луче (бирюзовая часть) траектория — центральное отражение левой части относительно точки входа; нижняя точка касается земли.

2. Условие пролёта. Если на границе 1 камень ещё поднимается, в луче он только «падает вверх» и долетит до границы 2. Если уже опускается, то в луче он продолжит опускаться и, по симметрии, опустится ниже точки входа на столько же, на сколько поднялся над ней до входа: на $H - h$. Нижняя точка в луче на высоте $h - (H - h) = 2h - H$. Камень не упадёт, если

$$2h - H > 0 \ \Rightarrow\ h > \frac{H}{2}.$$

Из формул движения с постоянным ускорением:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \qquad h = l\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

3. Минимальная скорость. Подставим H и h в $h > H/2$ и умножим на $4gv_0^2\cos^2\alpha > 0$; обозначим $s = \sin 2\alpha$ ($\sin\alpha\cos\alpha = s/2$):

$$2glv_0^2 s - 2g^2l^2 > \frac{v_0^4 s^2}{4}.$$

Умножив на $4/s^2$, получим

$$v_0^4 - \frac{8gl}{s}\,v_0^2 + \frac{8g^2l^2}{s^2} < 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{4gl}{s} - v_0^2\right)^2 < \frac{8g^2l^2}{s^2}.$$

Нас интересуют скорости меньше $\sqrt{2gl/s}$ (при большей камень на границе 1 ещё поднимается — условие $v_y \geq 0$, то есть $v_0\sin\alpha \geq g\,l/(v_0\cos\alpha)$), так что скобка положительна:

$$v_0^2 > \frac{(4-2\sqrt{2})\,gl}{\sin 2\alpha}.$$

Правая часть наименьшая при $\alpha = 45°$:

$$v_{m2} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})\,gl} \approx 1{,}08\sqrt{gl}.$$

Пункт 3.

4. Скорость на выходе. Время в луче равно времени до луча, $t_0 = l/(v_0\cos\alpha)$. За это время вертикальная скорость сначала уменьшилась на gt_0, потом выросла на gt_0:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t_0 - \vec{g}\,t_0 = \vec{v}_0.$$

Высота выхода — по центральной симметрии: точка выхода симметрична точке броска $(0,0)$ относительно (l,h), то есть $(2l,\ 2h)$ (рис. 3).

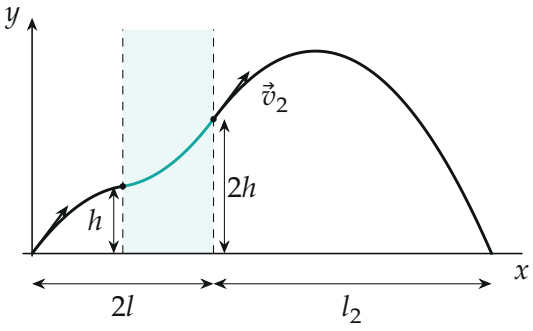


Рис. 3. Бросок под 45° со скоростью $v_0 = 1{,}5\sqrt{gl}$: на выходе из луча скорость та же $\vec{v}_0$, высота $2h$ (построено по формулам).

5. Полёт после луча. Уравнение движения по вертикали от выхода до падения за время t_2:

$$2h + v_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{g t_2^2}{2} = 0 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + \frac{4h}{g}}.$$

Горизонтальное смещение $l_2 = v_0 \cos\alpha\, t_2$. Подставив h из шага 2:

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{2l v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - 2l^2},$$

$$l_2 = \frac{v_0^2 s}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2 s}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

6. Максимум. l_2 растёт с $s = \sin 2\alpha$, наибольшее при $\alpha = 45°$ — и этот же угол пропускает камень сквозь луч при наименьшей скорости, так что при $v_0 \geq v_{m2}$ бросок под 45° допустим. Полная дальность $L = 2l + l_2$:

$$L_{m2} = 2l + \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

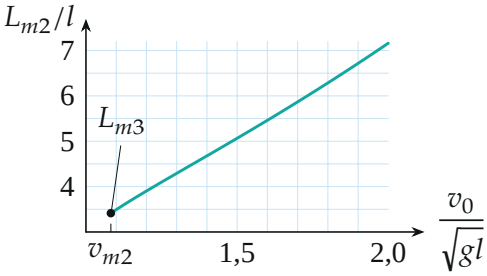


Рис. 4. Наибольшая дальность от начальной скорости. Левый конец кривой — $v_0 = v_{m2}$, $L_{m3} = (2+\sqrt{2})l$.

Пункт 4. При $v_0 = v_{m2}$ бросать можно только под 45° (при другом угле нужна большая скорость), и L_{m3} — значение формулы пункта 3 при $v_0^2 = 2(2-\sqrt{2})gl$:

$$L_{m3} = \left(4 - \sqrt{2} + \sqrt{(4-\sqrt{2})^2 - 6}\right) l = \left(4 - \sqrt{2} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}\right) l.$$

Так как $12 - 8\sqrt{2} = (2\sqrt{2} - 2)^2$, то $L_{m3} = (4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2)\, l = (2+\sqrt{2})\, l \approx 3{,}41\, l$.

Обратите внимание. Для пролёта не нужно, чтобы камень на границе луча ещё поднимался: достаточно $h > H/2$. Это условие мягче и даёт меньшую скорость $v_{m2} = 1{,}08\sqrt{gl}$ вместо $\sqrt{2gl}$.

Соберём ответ. $v_{m1} = \sqrt{gl}$; $v_{m2} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})gl}$; L_{m2} — формула шага 6; $L_{m3} = (2+\sqrt{2})l$.

Проверка. Размерность: v_0^2/g — длина, верно. Предел $v_0 \to \infty$: $L_{m2} \approx 2l + v_0^2/g$ — быстрый камень почти не замечает луча, верно. Численное моделирование полёта даёт при $v_0 = v_{m2}$ наибольшую дальность $3{,}42\, l$ под 45°, при $v_0 = 1{,}5\sqrt{gl}$ — $5{,}07\, l$, как и формула.

Ответ. 1) $v_{m1} = \sqrt{gl}$; 2) $v_{m2} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})gl} \approx \sqrt{1{,}17lg}$; 3) $L_{m2} = 2l + \dfrac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \dfrac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}$; 4) $L_{m3} = (2+\sqrt{2})l \approx 3{,}41l$.