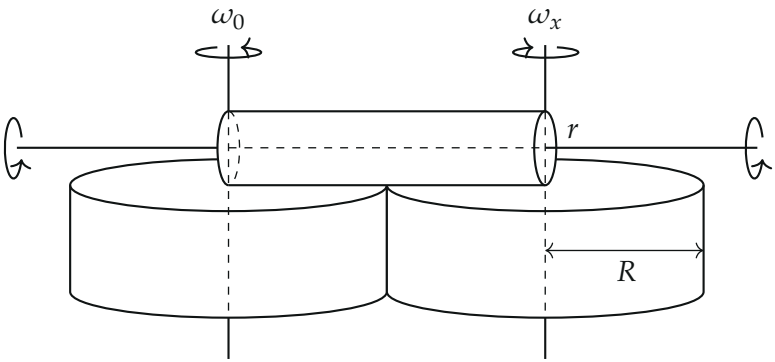
Раскрутка трением

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Раскрутка трением».

Два одинаковых диска с радиусами R насажены на параллельные вертикальные оси, на которых они могут вращаться без трения. Расстояние между осями чуть больше $2R$, так что между боковыми поверхностями дисков остаётся небольшой зазор. Верхние основания дисков лежат в одной горизонтальной плоскости. Цилиндрический валик радиуса r, длины $2R$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, плоскость которой лежит в одной плоскости с осями дисков. Сам валик располагается между осями дисков и прижимается к верхним основаниям дисков с одинаковыми силами. Линия касания валика и дисков совпадает с радиусами дисков. Один из дисков вращается с помощью электродвигателя с постоянной угловой скоростью ω_0 и приводит во вращение из-за трения между соприкасающимися поверхностями валик, который в свою очередь раскручивает второй диск.



Найдите установившуюся скорость вращения ω_x второго диска.

Примечание. При вращении твёрдого тела с постоянной угловой скоростью сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие моментов сил трения скольжения, распределённых по линии. Валик касается каждого диска по радиусу. Скорость точек диска на линии касания растёт от

оси линейно, а скорость поверхности валика везде одна, Ωr. Поэтому совпадают они только в одной точке, а по обе стороны от неё валик и диск проскальзывают в разные стороны, и сила трения меняет направление. При установившемся вращении сумма моментов сил трения на свободном диске и на валике равна нулю — это даёт обе точки смены направления, а из равенства скоростей в них — ω_x.

Обозначения. Ω — угловая скорость валика; ось y — вдоль линии касания (оси валика) от оси правого (свободного) диска к оси левого (с мотором), $0 \le y \le 2R$; f — сила трения на единицу длины линии касания (прижатие равномерное, трение скольжения, поэтому f всюду одинакова по модулю); y_x и y_0 — точки смены направления трения на правом и на левом диске.

1. Скорости вдоль линии касания. Точка правого диска на расстоянии y от его оси движется со скоростью $\omega_x y$ ($0 \le y \le R$), точка левого диска — со скоростью $\omega_0(2R - y)$ ($R \le y \le 2R$), обе — перпендикулярно линии касания. Поверхность валика в нижней точке движется со скоростью Ωr в ту же сторону (рис. 1, вид сверху).

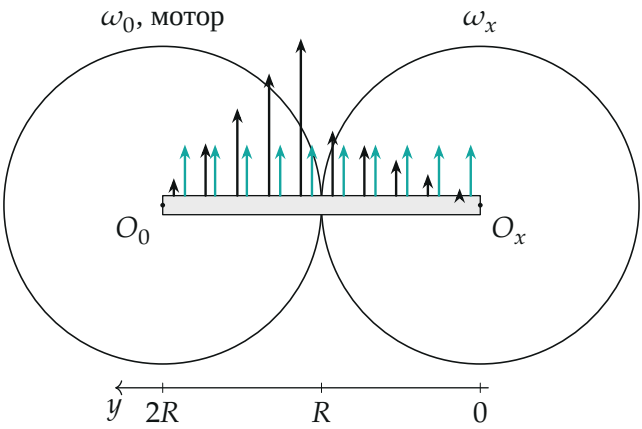


Рис. 1. Вид сверху: скорости точек дисков на линии касания (чёрные) и поверхности валика (бирюзовые, одинаковые), построены для найденных ω_x и Ω.

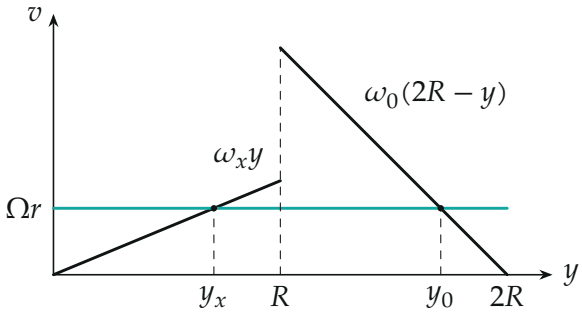


Рис. 2. Скорости вдоль линии касания: диски (чёрные) и валик (бирюзовая). Пересечения y_x и y_0 — точки, где трение меняет направление.

2. Момент сил трения на правом диске. На участке $0 < y < y_x$ валик быстрее диска — трение тянет диск по скорости валика; на участке $y_x < y < R$ диск быстрее — трение тормозит его (рис. 3). Равномерно распределённая сила $f\,\Delta y$ на участке приложена в его середине. Сумма моментов относительно оси диска равна нулю (диск вращается равномерно):

$$f\,y_x \cdot \frac{y_x}{2} = f\,(R - y_x) \cdot \frac{R + y_x}{2} \;\Rightarrow\; y_x^2 = R^2 - y_x^2 \;\Rightarrow\; y_x = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

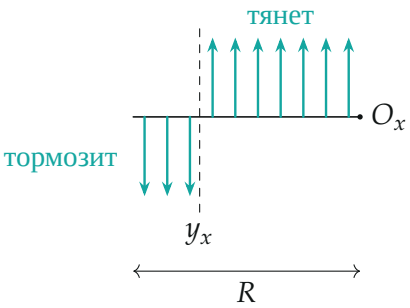


Рис. 3. Силы трения, действующие на свободный диск вдоль радиуса касания. Участок у оси длиннее, но плечи на нём меньше — моменты уравновешены при $y_x = R/\sqrt{2}$.

3. Момент сил трения на валике. Плечо всех сил трения относительно оси валика одно и то же — r. Направления на валике противоположны тем, что действуют на диски (третий закон Ньютона), и на левом диске при $y < y_0$ диск быстрее и разгоняет валик, при $y > y_0$ — тормозит (рис. 4). Сумма моментов на валике равна нулю:

$$f\,y_x\,r + f\,(2R - y_0)\,r = f\,(R - y_x)\,r + f\,(y_0 - R)\,r \;\Rightarrow\; y_0 = y_x + R = R + \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Слева — тормозящие участки, справа — разгоняющие: их суммарные длины равны.

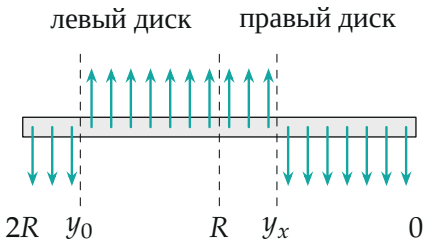


Рис. 4. Силы трения на валик (вид сверху, вверх — по скорости поверхности валика). Разгоняющие и тормозящие участки равны по суммарной длине.

4. Равенство скоростей в точках смены. В точке y_x скорость правого диска равна скорости валика, в точке y_0 — скорость левого:

$$\omega_x\,y_x = \Omega r = \omega_0\,(2R - y_0) \;\Rightarrow\; \omega_x\,\frac{R}{\sqrt{2}} = \omega_0\left(R - \frac{R}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\omega_x = \omega_0\,(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}41\,\omega_0.$$

Обратите внимание. Нельзя считать, что валик катится без проскальзывания: линия касания — радиус, скорости диска на ней разные, а у валика одна. Проскальзывание есть везде, кроме двух точек, и именно его направление решает задачу.

Проверка. Размерность: угловая скорость — верно. $\omega_x < \omega_0$ — ведомый диск отстаёт. Ответ не зависит ни от r, ни от силы прижатия,

ни от коэффициента трения: все моменты пропорциональны f, и она сокращается. Числами при $R = 1$: на правом диске моменты участков $\frac{1}{2} \cdot 0{,}707^2 = 0{,}25$ и $\frac{1}{2}(1 - 0{,}707^2) = 0{,}25$ равны; на валике тормозящие участки $0{,}707 + 0{,}293 = 1$, разгоняющие $0{,}293 + 0{,}707 = 1$.

Ответ. $\omega_x = \omega_0(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}41\,\omega_0$.