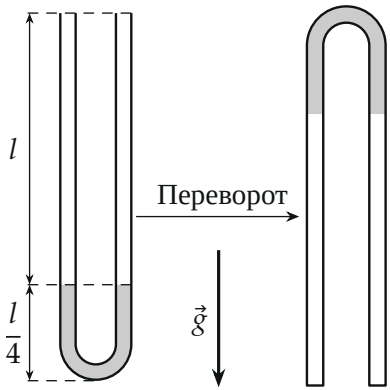
Трубка со ртутью

Задача 4. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 10 класс, задача 4] «Трубка со ртутью».

В U-образную трубку, расположенную вертикально открытыми концами вверх, залили ртуть, после чего концы трубки запаяли. Радиус закругления внизу трубки и внутренний диаметр трубки много меньше длины прямых участков. Длина столбиков воздуха в исходном положении составляла $l = 625$ мм, длина столбиков ртути справа и слева от места изгиба трубки равнялась $l_2 = l/4$ (см. рисунок). Трубку повернули вокруг горизонтальной оси на 180°. Через некоторое время ртуть заняла устойчивое положение равновесия.



1. На какое расстояние h_0 сместятся концы столбика ртути после переворота, если в конечном состоянии температура не изменится и будет равна T_0?
2. На какое расстояние h_1 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_1 = 0{,}8T_0$?
3. На какое расстояние h_2 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_2 = 0{,}7T_0$?
4. Докажите устойчивость положения равновесия, найденного в п.3.

Капиллярными эффектами и колебаниями столбика ртути можно пренебречь. Ускорение свободного падения равно g. Атмосферное давление во время эксперимента $P_\text{A} = 750$ мм.рт.ст.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие жидкости с газовыми «пружинами» и на устойчивость равновесия. После переворота ртуть висит в изгибе наверху, а под ней в обоих коленах — запертый воздух. Если ртуть сдвинется на h в одно колено, там её столбик станет выше на $2h$, чем в другом, и вес этого лишнего столбика тянет её дальше — это «отрицательная пружина». Воздух сопротивляется: с одной стороны сжимается, с другой расширяется, и разность давлений толкает ртуть назад — «положительная пружина». Что сильнее — решает начальное давление воздуха, а оно падает при охлаждении. Законы — закон Бойля — Мариотта для каждого столбика воздуха и условие равновесия ртути.

Обозначения. S — сечение трубки; ρ — плотность ртути; h — смещение столбика ртути вдоль трубки (в левое колено); P — давление воздуха в обоих коленах до переворота при данной температуре; давления удобно мерить в мм рт. ст.: $P = \rho g L$, где L — «длина» давления; $P_{\text{л}}$, $P_{\text{п}}$ — давления воздуха слева и справа.

1. Охлаждение до переворота. Объём воздуха до переворота не меняется, а по уравнению Менделеева — Клапейрона $P \propto T$ при постоянном объёме: $P = P_{\text{A}}\, T/T_0$. Значит, охлаждение до $0{,}8T_0$ и $0{,}7T_0$ равносильно начальному давлению $L_1 = 600$ мм рт. ст. и $L_2 = 525$ мм рт. ст. (температура в процессе переворота постоянна).

2. Давления воздуха. Сдвинем ртуть на h в левое колено (рис. 1). Закон Бойля — Мариотта для каждого столбика воздуха (масса и температура постоянны):

$$P_{\text{л}} = \frac{Pl}{l-h}, \qquad P_{\text{п}} = \frac{Pl}{l+h}.$$

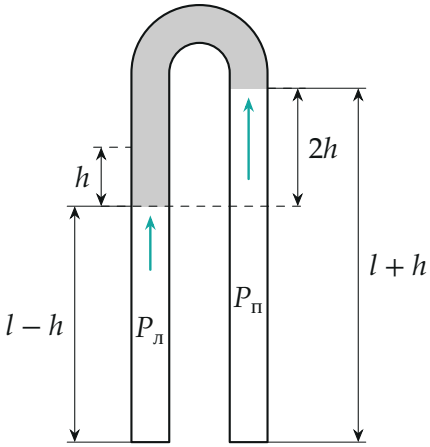


Рис. 1. Перевёрнутая трубка, ртуть (серая) сдвинута на h в левое колено; построено для $h = h_1 = l/5$. Левый конец ртути ниже правого на $2h$.

3. Условие равновесия ртути. Давление в изгибе наверху одно. Спускаясь по каждому колену до нижнего конца ртути (закон гидростатики), получаем: $P_л = p_{верх} + \rho g(l/4 + h)$, $P_п = p_{верх} + \rho g(l/4 - h)$. Вычитаем:

$$P_л - P_п = 2\rho g h \;\Rightarrow\; Pl\left(\frac{1}{l-h} - \frac{1}{l+h}\right) = 2\rho g h \;\Rightarrow\; \frac{2Plh}{l^2 - h^2} = 2\rho g h.$$

Решения: $h = 0$ и $l^2 - h^2 = lL$, то есть

$$h = \sqrt{l\,(l - L)},$$

— только при $L < l$. Формула верна, пока ртуть есть в обоих коленах: $h \le l/4$.

4. Устойчивость $h = 0$**.** Слегка сдвинем ртуть на x. Разность давлений воздуха $\approx 2Px/l$ возвращает её, лишний столбик $2\rho g x$ тянет дальше. Возврат сильнее, если $2\rho g L x/l > 2\rho g x$, то есть $L > l$. На рис. 2 это видно по наклонам: при $L > l$ кривая давлений идёт круче прямой $2h$.

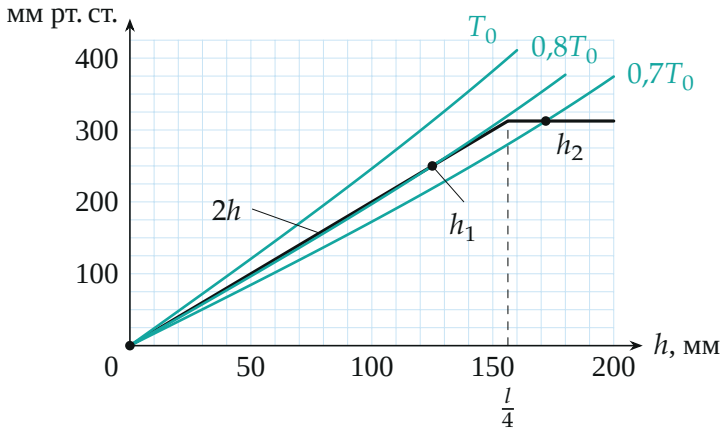


Рис. 2. Разность давлений воздуха $P_л - P_п$ (бирюзовые, для трёх температур) и избыточное давление ртути (чёрная: $2h$, после $h = l/4$ — постоянное $l/2$). Пересечения — равновесия; устойчиво то, где бирюзовая кривая пересекает чёрную снизу вверх.

Пункт 1. $L = 750 > l = 625$: корень $\sqrt{l(l-L)}$ не существует, единственное равновесие $h = 0$, и оно устойчиво (шаг 4):

$$h_0 = 0.$$

Пункт 2. $L_1 = 600 < 625$: равновесие $h = 0$ неустойчиво, ртуть уходит в одно из колен до

$$h_1 = \sqrt{l\,(l - L_1)} = \sqrt{625 \cdot 25} = 125 \text{ мм} = \frac{l}{5} < \frac{l}{4}.$$

Устойчивость: при сдвиге на x из h_1 приращение разности давлений $\dfrac{d}{dh}\dfrac{2Llh}{l^2 - h^2} = \dfrac{2Ll(l^2 + h^2)}{(l^2 - h^2)^2}$ при $h = l/5$ равно

$$\frac{2L_1}{l} \cdot \frac{26/25}{(24/25)^2} = 2 \cdot \frac{600}{625} \cdot \frac{650}{576} = 2 \cdot \frac{26}{24} > 2$$

(в мм рт. ст. на мм) — больше наклона 2 у столбика ртути, возврат сильнее.

Пункт 3. $L_2 = 525$: формула даёт $\sqrt{625 \cdot 100} = 250$ мм $> l/4 = 156$ мм — ртуть столько в обоих коленах не удержится: она вся перетекает в одно колено (рис. 3). Тогда разность уровней концов ртути — вся её длина $l/2$, и условие равновесия

$$\frac{2L_2 l h_2}{l^2 - h_2^2} = \frac{l}{2} \;\Rightarrow\; h_2^2 + 4L_2 h_2 - l^2 = 0,$$

$$h_2 = \sqrt{4L_2^2 + l^2} - 2L_2 = \sqrt{4 \cdot 525^2 + 625^2} - 1050 \approx 172 \text{ мм}.$$

Проверка допущения: $h_2 = 172 > l/4 = 156$ мм — ртуть действительно вся в одном колене.

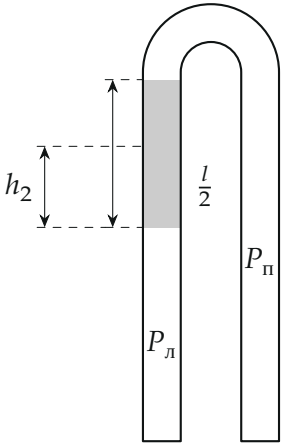


Рис. 3. При $T_2 = 0{,}7T_0$ вся ртуть ушла в левое колено и сместилась на $h_2 \approx 172$ мм; правый воздух занимает правое колено, изгиб и верх левого колена.

Пункт 4. Устойчивость. Сдвинем ртуть из найденного положения ещё на малое $x > 0$ (дальше в левое колено). Левый воздух сжимается — его давление растёт на $\Delta P_1 > 0$; правый расширяется — давление падает на $\Delta P_2 > 0$. Сила давлений $(P_л - P_п)S$, толкающая ртуть обратно, выросла на $(\Delta P_1 + \Delta P_2)S > 0$. А сила тяжести, тянущая дальше, не изменилась: вся ртуть в одном колене, перепад высот её концов по-прежнему $l/2$, $F_т = \rho g S l/2$. Возвращающая сила больше — ртуть идёт назад. При $x < 0$ всё наоборот, и снова к равновесию. На рис. 2 это

пересечение бирюзовой кривой $0{,}7T_0$ с горизонтальной частью чёрной линии снизу вверх.

Обратите внимание. Корень $h = 250$ мм в пункте 3 ложный: формула $2\rho g h$ для перепада уровней верна, только пока ртуть есть в обоих коленах. И при T_1 ответ — не $h = 0$: это равновесие есть, но неустойчивое.

Соберём ответ. $h_0 = 0$; $h_1 = \sqrt{l(l - L_1)} = l/5 = 125$ мм; $h_2 = \sqrt{4L_2^2 + l^2} - 2L_2 \approx 172$ мм, $L_2 = 0{,}7P_\text{A}/(\rho g) = 525$ мм.

Проверка. Размерности — длины, верно. На стыке случаев ($h = l/4$) формулы шагов 3 и пункта 3 совпадают: $2h = l/2$. Численно: при $h_2 = 171{,}9$ мм разность давлений $525 \cdot 625\,(1/453{,}1 - 1/796{,}9) = 312{,}5$ мм рт. ст. $= l/2$ — сходится.

Ответ. 1) $h_0 = 0$; 2) $h_1 = l/5 = 125$ мм; 3) $h_2 = \sqrt{4L_2^2 + l^2} - 2L_2 \approx 172$ мм, где $L_2 = 0{,}7 \cdot 750 = 525$ мм (ртуть целиком переходит в одно колено); 4) при малом смещении x из этого положения разность сил давления воздуха растёт на $(\Delta P_1 + \Delta P_2)S > 0$ и возвращает ртуть, а сила тяжести не меняется — равновесие устойчиво.