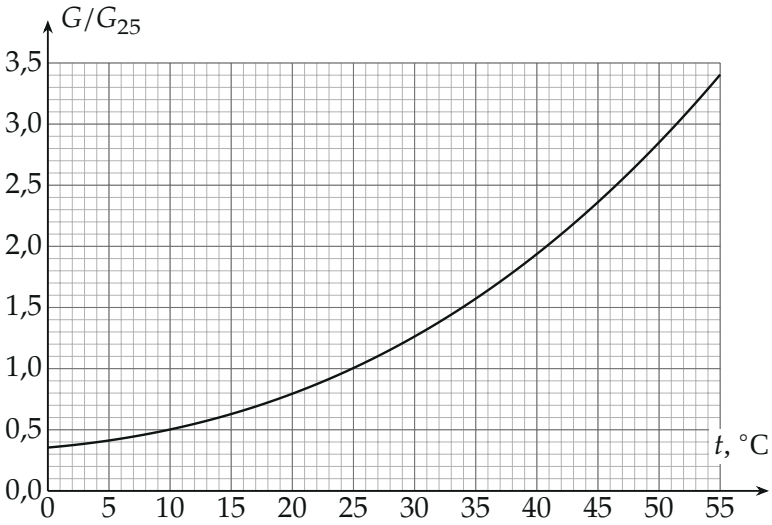
Термистор

Задача 5. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 10 класс, задача 5] «Термистор».

Для измерения температуры можно использовать термистор — элемент, проводимость G которого сильно зависит от его температуры. На графике этой зависимости, представленном на отдельном листе, G_{25} — проводимость термистора при 25 °C. Термистор подключается последовательно к источнику постоянного напряжения и амперметру, показания которого встроенный компьютер переводит в числовое значение температуры, выводимое на экран. Известно, что при номинальном напряжении источника экран показывает **верное** значение **температуры термистора**. Экспериментатор Глюк решил поэкспериментировать с этим прибором в собственной лаборатории. Оказалось, что при реальном значении температуры воздуха 27 °C и поданном на термистор номинальном напряжении экран показывает 29 °C. При ответе на вопросы 1 и 2 считайте, что напряжение на термисторе равно номинальному.

1. При какой температуре воздуха t_1 экран прибора показал бы значение, превышающее t_1 на 1 °C?
2. Какое значение показал бы экран прибора при температуре воздуха 38,5 °C?
3. Продолжая эксперименты, Глюк увеличил напряжение источника, сделав его вдвое больше номинального. Какое значение температуры покажет экран в этом случае, если Глюк не менял настройки компьютера, а температура воздуха в лаборатории равна 24 °C?

Амперметр считайте идеальным. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Термистор во всех экспериментах находится в воздухе, не контактируя с другими предметами, а все измерения проводятся в установившемся режиме.



Примечание. 1. Проводимостью элемента электрической цепи называется физическая величина, равная отношению силы тока, текущего через данный элемент, к напряжению на этом элементе. 2. На отдельном листе приведены два одинаковых экземпляра графика зависимости проводимости термистора от его температуры. При сдаче работы этот лист вкладывается в решение участника.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на тепловой баланс в установившемся режиме и графическое решение уравнения. Ток греет термистор, и он горячее воздуха: джоулева мощность U^2G уходит в воздух как $k(t - t_в)$. Прибор честно показывает температуру *термистора*, а не воздуха, — отсюда ошибка в 2 °C в опыте Глюка. Уравнение баланса содержит $G(t)$, заданную только графиком, поэтому решаем его пересечением прямой с графиком. В пункте 3 добавляется вторая ошибка: компьютер переводит ток в температуру, считая напряжение номинальным.

Обозначения (рис. 2). U_0 — номинальное напряжение; t — температура термистора; $t_в$ — температура воздуха; k — коэффициент теплоотдачи (мощность потерь $k(t-t_в)$); $t_э$ — число на экране; $g(t) = G(t)/G_{25}$ — величина, которая отложена на графике.

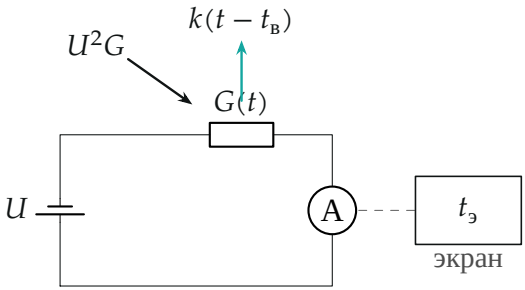


Рис. 2. Схема прибора. В термистор приходит джоулева мощность U^2G, уходит в воздух $k(t-t_в)$. Компьютер переводит ток I в число $t_э$.

1. Что показывает экран. По определению проводимости ток через термистор $I = UG(t)$. Компьютер настроен так, что при $U = U_0$ показывает верную температуру термистора. Значит, он решает уравнение

$$I = U_0\, G(t_э)$$

относительно $t_э$. При $U = U_0$ отсюда $G(t_э) = G(t)$, $t_э = t$: экран показывает температуру термистора.

2. Тепловой баланс. Режим установившийся — температура термистора не меняется, и вся джоулева мощность уходит в воздух (закон сохранения энергии для термистора):

$$U^2G(t) = k\,(t - t_в).$$

Делим на $U_0^2G_{25}$ и вводим одно число $\beta = \dfrac{k}{U_0^2G_{25}}$ (размерность $1/°\text{C}$):

$$\frac{U^2}{U_0^2}\,g(t) = \beta\,(t - t_в). \qquad (1)$$

3. Коэффициент β из опыта Глюка. $U = U_0$, $t_в = 27\ °\text{C}$, экран — значит и термистор — $t = 29\ °\text{C}$. По графику $g(29\ °\text{C}) = 1{,}2$. Из (1):

$$\beta = \frac{g(29\ °\text{C})}{29\ °\text{C} - 27\ °\text{C}} = \frac{1{,}2}{2\ °\text{C}} = 0{,}60\ \frac{1}{°\text{C}}.$$

Термистор перегрет над воздухом на $\Delta t = t - t_в = g(t)/\beta$: чем выше проводимость, тем больше перегрев.

Пункт 1. Экран показывает t, и по условию $t - t_1 = 1\ ^\circ\text{C}$. Уравнение (1) при $U = U_0$:

$$g(t) = \beta \cdot 1\ ^\circ\text{C} = 0{,}60.$$

На графике $g = 0{,}60$ при $t = 14\ ^\circ\text{C}$ (точка 1 на рис. 3). Отсюда $t_1 = t - 1\ ^\circ\text{C} = 13\ ^\circ\text{C}$.

Пункт 2. $t_в = 38{,}5\ ^\circ\text{C}$, $U = U_0$:

$$g(t) = 0{,}60\,(t - 38{,}5\ ^\circ\text{C}).$$

Правая часть — прямая A: она проходит через точку $(38{,}5;\ 0)$ и при $t = 43{,}5\ ^\circ\text{C}$ достигает $g = 3{,}0$. Пересекаем её с графиком (рис. 3): $t \approx 42\ ^\circ\text{C}$, $g \approx 2{,}1$. Проверка подстановкой: $0{,}60 \cdot (42 - 38{,}5) = 2{,}1$ — совпадает с графиком. Экран покажет 42 °C.

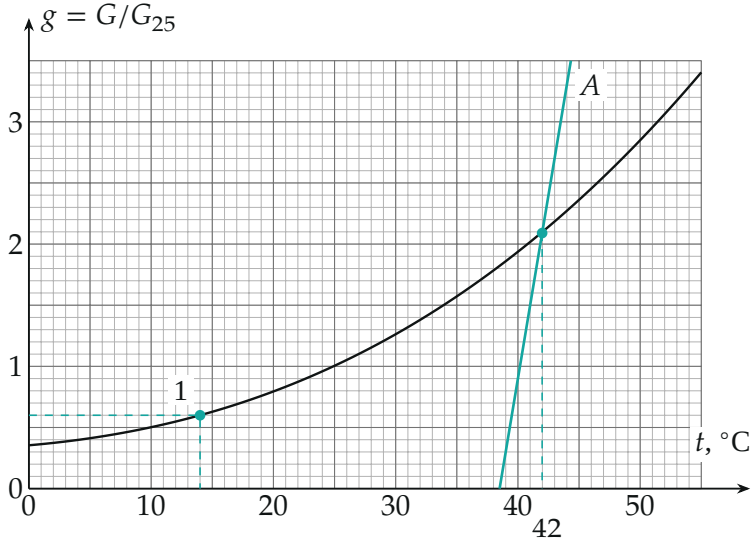


Рис. 3. Пункт 1: горизонталь $g = 0{,}60$ даёт точку 1, $t = 14\ ^\circ\text{C}$. Пункт 2: прямая A, $g = 0{,}60\,(t - 38{,}5)$, пересекает график при $t \approx 42\ ^\circ\text{C}$.

Пункт 3. Теперь $U = 2U_0$, $t_в = 24\ ^\circ\text{C}$. Шаг 1: термистор нагреется до своей температуры t_2, которую задаёт баланс. Шаг 2: экран переведёт ток в $t_э \neq t_2$.

3а. Температура термистора. Уравнение (1) с $U^2/U_0^2 = 4$:

$$4g(t_2) = 0{,}60\,(t_2 - 24\ ^\circ\text{C}) \quad \Rightarrow \quad g(t_2) = 0{,}15\,(t_2 - 24\ ^\circ\text{C}).$$

Это прямая B через $(24;\,0)$ с наклоном 0,15 на градус (при $t = 44\ ^\circ$C она даёт $g = 3{,}0$). Пересечение с графиком (рис. 4): $t_2 \approx 34\ ^\circ$C, $g(t_2) \approx 1{,}5$. Проверка: $0{,}15 \cdot (34 - 24) = 1{,}5$. Мощность выросла вчетверо, а термистор перегрет над воздухом на 10 °C вместо 2 °C.

3б. Что покажет экран. Ток $I = 2U_0\,G(t_2)$. Компьютер по шагу 1 ищет $t_э$ из $I = U_0 G(t_э)$:

$$U_0 G(t_э) = 2U_0 G(t_2) \quad \Rightarrow \quad g(t_э) = 2g(t_2) = 3{,}0.$$

По графику $g = 3{,}0$ при $t_э \approx 51{,}5\ ^\circ$C (точка 2 на рис. 4).

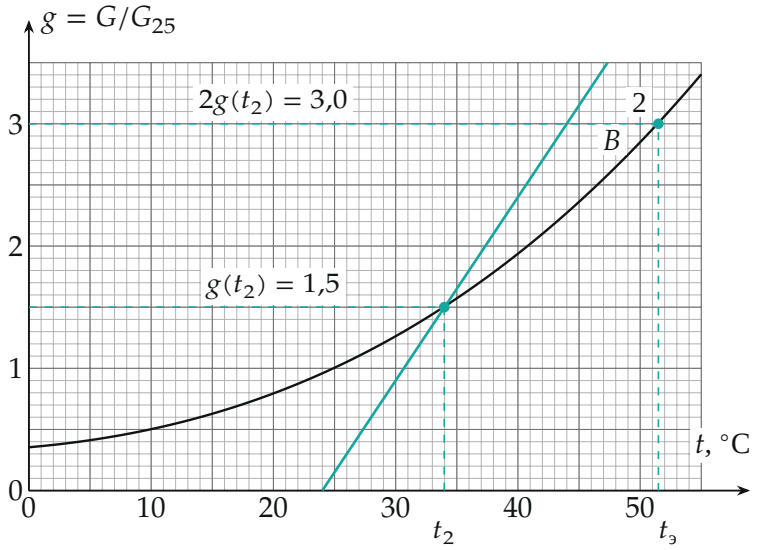


Рис. 4. Пункт 3: прямая B, $g = 0{,}15\,(t - 24)$, даёт настоящую температуру термистора $t_2 \approx 34\ ^\circ C$; удвоенная проводимость $g = 3{,}0$ — число на экране $t_э \approx 51{,}5\ ^\circ C$.



Рис. 5. Откуда в пункте 3 берётся разница между воздухом и экраном: $10\,°C$ *— термистор нагрет током, ещё* $17{,}5\,°C$ *— компьютер считает напряжение номинальным.*

Обратите внимание. В пункте 3 экран показывает не $t_2 = 34\,°C$: удвоенный ток компьютер принимает за удвоенную проводимость при номинальном напряжении. Ответ организаторов — именно число на экране, 51,5 °C.

Ответ. $t_1 = 13\,°C$; экран при 38,5 °C покажет $\approx 42\,°C$; при $2U_0$ и 24 °C термистор нагреется до $t_2 \approx 34\,°C$, а экран покажет $t_э \approx 51{,}5\,°C$.

Проверка. Размерность: в (1) слева безразмерное g, справа β в $1/°C$ на градусы — согласовано. Предел: при $U \to 0$ ток не греет, из (1) $t \to t_в$ — прибор показывал бы температуру воздуха. Численно (кривая графика, решение уравнений методом деления пополам на python): $t_1 = 13{,}1\,°C$, $t = 41{,}98\,°C$, $t_2 = 33{,}97\,°C$, $t_э = 51{,}49\,°C$ — совпадает с графическими. Знак: при более тёплом воздухе (38,5 против 27 °C) проводимость больше, перегрев больше (3,5 против 2 °C) — так и должно быть, перегрев равен g/β.

Смысл: термистор — не только датчик, но и нагреватель; чем больше ток, тем сильнее он искажает измерение.

Ответ. 1) $t_1 = 13\,°C$; 2) $\approx 42\,°C$; 3) экран покажет $t_э \approx 51{,}5\,°C$ (сам термистор нагрет до $t_2 \approx 34\,°C$).