Пружина на весах

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Пружина на весах».

Оборудование. Пружина «Slinky», электронные весы, деревянная линейка 40 см, деревянная линейка 20 см, 2 деревянных прямоугольных бруска, малярный скотч, миллиметровая бумага для графиков.

Задание. Запишите номер установки.

1. Измерьте зависимость веса пружины P, установленной на весы одним из оснований, от вертикальной координаты x верхнего витка пружины. Полученные данные представьте в виде: $\Delta P = P - P_0$, где P_0 — вес всей пружины, и $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — вертикальная координата верхнего витка пружины, когда вся пружина покоилась на весах.
2. Предложите теоретическую зависимость $\Delta P(\Delta x)$ для большого числа витков, которые изменили своё положение.
3. На основании полученных данных пункта 1 с помощью графика проверьте соответствие теории и эксперимента.
4. Используя результаты пунктов 2 и 3, определите коэффициент жёсткости одного витка пружины и оцените его погрешность.
5. Оцените момент силы, создаваемый пружиной при повороте одного её конца относительно другого на один оборот вокруг оси симметрии цилиндрической части пружины. Опишите свой метод.

Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Проверьте выданную вам пружину: не должно быть слипшихся витков, все витки должны быть ровными и в нерастянутом состоянии плотно прилегать друг к другу.

▲ **Решение. Что происходит.** Это экспериментальная задача на закон Гука для «цепочки» одинаковых пружинок. Пружину Slinky можно представить как N одинаковых витков массы m, соединённых пружинками жёсткости k. Поднимаем верхний виток — часть витков отрывается от весов и повисает. Каждый повисший виток держит вес витков *под* ним в висящей части, поэтому растяжения растут сверху

вниз линейно, а суммарный подъём растёт как *квадрат* числа повисших витков. Весы же «теряют» вес повисших витков — линейно. Отсюда $(\Delta P)^2 \propto \Delta x$ — это и проверяем, а из наклона находим k.

Обозначения. $N = 37$ — число витков, $M = 20{,}37$ г — масса пружины, $m = M/N$ — масса витка, k — жёсткость одного витка (пружинки между соседними витками), n — число витков, оторвавшихся от весов.

1. Установка и измерения. Линейку 40 см скотчем крепим к бруску вертикально, линейку 20 см ко второму бруску — горизонтально. Нижний виток стоит на весах, верхний цепляем горизонтальной линейкой и, прижимая второй брусок к первому, поднимаем его вдоль вертикальной линейки (рис. 1), записывая показания весов и высоту верхнего витка. Пружина не должна сползать с чашки весов.

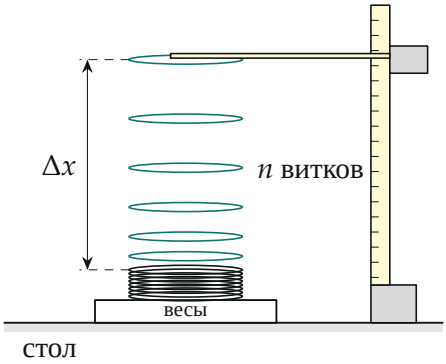

Рис. 1. Установка: верхний виток поднимают горизонтальной линейкой вдоль вертикальной; повисшие витки (бирюзовые) растянуты тем сильнее, чем выше.

Результаты организаторов ($m_в$ — показания весов, $|\Delta P| = (M - m_в)g$):

Δx, мм	0	8	13	18	23	28	33	38
$\lvert\Delta P\rvert$, мН	0	49	68	78	89	103	113	120

Δx, мм	43	48	53	58	63	68	73	78
$\lvert\Delta P\rvert$, мН	129	135	140	149	156	159	166	169

Δx, мм	83	88	93	98	103	108	113
$\lvert\Delta P\rvert$, мН	176	179	186	193	196	199	200

2. Теория. Рассмотрим n повисших витков (рис. 2). Нумеруем их сверху: $i = 1, \dots, n$. Нижний (n-й) ещё касается весов, но уже не давит на них. Условие равновесия (первый закон Ньютона) для части пружины ниже пружинки между витками i и $i+1$: пружинка держит вес висящих витков под ней, их $n - i$:

$$k\,\delta_i = (n - i)\,mg,$$

где δ_i — растяжение этой пружинки. Подъём верхнего витка — сумма растяжений:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \frac{mg}{k} \sum_{i=1}^{n} (n - i) = \frac{mg}{k} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{mg\,n^2}{2k} \quad (n \gg 1).$$

Весы перестали чувствовать вес повисших витков: $|\Delta P| = nmg$. Исключаем n:

$$(\Delta P)^2 = 2kmg\,\Delta x, \qquad |\Delta P| = \sqrt{2kmg}\,\sqrt{\Delta x}.$$

Зависимость $\Delta P(\Delta x)$ — корневая, а не линейная, как у обычной пружины.

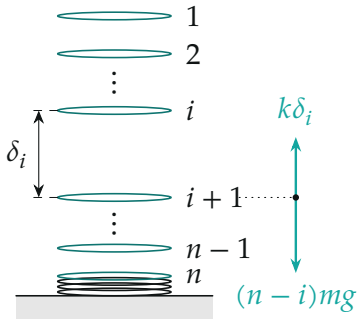

Рис. 2. Повисшие витки (номера сверху). Пружинка между витками i и $i+1$ держит вес $n - i$ витков под ней; длины стрелок равны.

3. Проверка графиком. Строим $(\Delta P)^2$ от Δx (рис. 3): точки ложатся на прямую через начало координат — теория подтверждается. Методом наименьших квадратов по всем 22 точкам:

$$\beta_1 = \frac{(\Delta P)^2}{\Delta x} = 0{,}369 \pm 0{,}005\ \text{Н}^2/\text{м}$$

(свободный член $1{,}4 \cdot 10^{-4}$ Н^2 — в пределах разброса, прямая проходит через нуль).

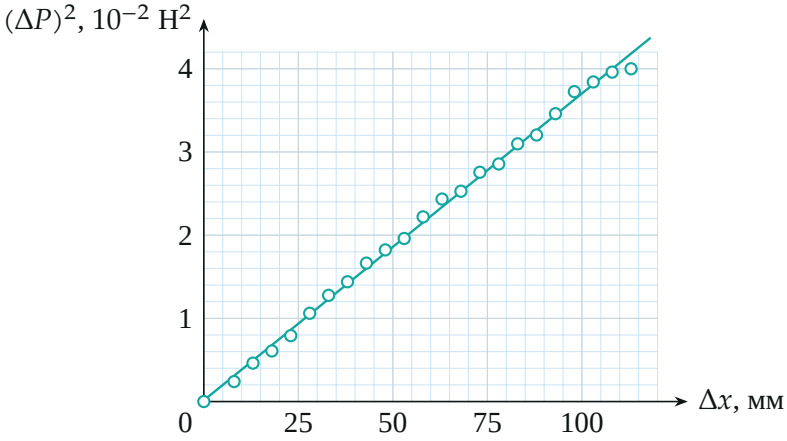

Рис. 3. Квадрат изменения веса от подъёма верхнего витка (данные организаторов) и прямая МНК: зависимость линейная, как предсказывает теория.

Второй способ — $|\Delta P|$ от $\sqrt{\Delta x}$ (рис. 4): тоже прямая через нуль, наклон

$$\beta_2 = \frac{|\Delta P|}{\sqrt{\Delta x}} = 0{,}609 \pm 0{,}002 \text{ Н/м}^{1/2}.$$

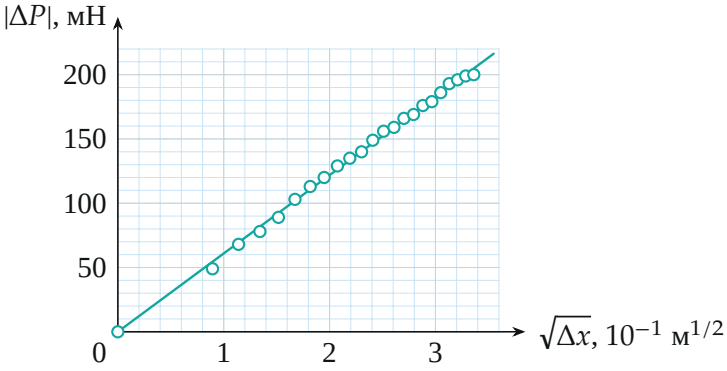

Рис. 4. Модуль изменения веса от корня из подъёма: та же проверка, прямая через начало координат.

4. Жёсткость витка. Масса витка $m = M/N = 20{,}37/37 = 0{,}551$ г. Из $\beta_1 = 2kmg$:

$$k = \frac{\beta_1}{2mg} = \frac{0{,}369}{2 \cdot 0{,}551 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} \approx 34{,}2 \text{ Н/м}.$$

По β_2: $k = \beta_2^2/(2mg) = 34{,}4$ Н/м — то же.

Погрешность.

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta \beta_1}{\beta_1} + \frac{\Delta m}{m}.$$

Статистический разброс наклона — 1,2 %. Добавляются систематические: отсчёт высоты по линейке ± 1 мм — 2 % в середине диапазона ($\Delta x \approx 50$ мм); неточность формулы $n(n-1)/2 \approx n^2/2$ при малых n (первые точки) — около 1 % при подгонке; масса витка (± 1 виток при счёте, $\pm 0{,}01$ г) — 0,5 %. Итого около 5 %:

$$k = (34{,}2 \pm 1{,}8) \text{ Н/м}.$$

5. Момент при закручивании. Один крайний виток скотчем крепим к концу линейки 40 см, пружину кладём боком на стол, линейку — в вертикальной плоскости, её свободный конец — на весы; по бокам линейки на 2–3 мм ставим бруски, чтобы она не опрокидывалась (рис. 5). Обнуляем весы и закручиваем свободный конец пружины на один оборот. Правило моментов для линейки относительно оси пружины: момент пружины уравновешен моментом силы реакции весов на плече l:

$$M_{\text{пр}} = m_{\text{в}}\, g\, l = 2{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}41 \approx 1{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$$

($m_{\text{в}} = 2{,}51$ г — показание весов, $l = 41$ см — плечо). Это оценка: момент зависит от того, как витки ложатся на стол, погрешность не вычисляем.

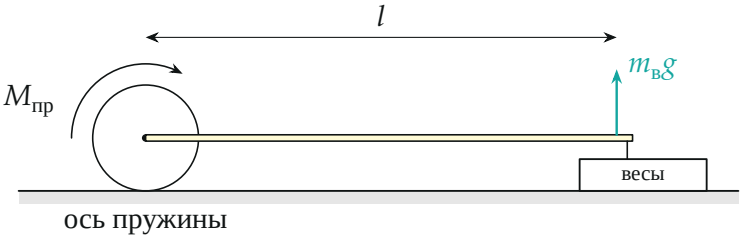

Рис. 5. Измерение момента (вид вдоль оси пружины): линейка, прикреплённая к крайнему витку, давит на весы; момент пружины уравновешен моментом реакции весов.

Обратите внимание. Последняя точка ($\Delta P = P_0 = 200$ мН) — момент, когда от весов оторвался последний виток. Если поднимать дальше, ΔP больше не меняется, а Δx растёт — такие точки к теории не относятся и в подгонку не идут. Формула $\Delta x \propto n^2$ верна, пока хотя бы часть витков лежит на весах.

Соберём ответ. $(\Delta P)^2 = 2kmg\,\Delta x$ подтверждается; $k = \beta_1/(2mg) = (34{,}2 \pm 1{,}8)$ Н/м; $M_{пр} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ Н·м на оборот.

Проверка. Размерность: $[2kmg\,\Delta x] = \text{Н/м}\cdot\text{Н}\cdot\text{м} = \text{Н}^2$ — верно. Оценка: вся пружина повисает при $n = 37$, подъём $mgN^2/(2k) = 0{,}54 \cdot 10^{-2} \cdot 37^2/68 \approx 0{,}11$ м — совпадает с последней точкой таблицы (113 мм). Жёсткость всей пружины $k/N \approx 0{,}9$ Н/м — Slinky действительно очень мягкая.

Ответ. 2) $(\Delta P)^2 = 2kmg\,\Delta x$; 4) $k = (34{,}2 \pm 1{,}8)$ Н/м (жёсткость одного витка); 5) момент при повороте на один оборот $M \approx 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ Н·м.