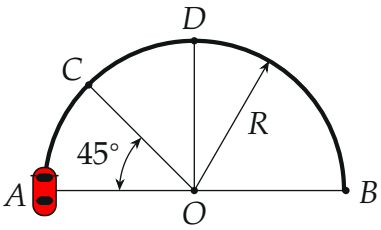
По окружности и побыстрее

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 11 класс, задача 1] «По окружности и побыстрее».

Автомобилист проезжает полуокружность AB радиусом $R = 80$ м так, чтобы, стартовав из положения покоя, добраться до ее конца как можно быстрее. Поверхность дороги горизонтальна, автомобиль — небольшой по размеру, с мощным двигателем и четырьмя ведущими колесами. Общий коэффициент трения всех колес о дорогу считать постоянным и равным $\mu = 0{,}5$. Ускорение свободного падения примите равным $g \approx 10$ м/с^2.

1. До какой максимальной скорости может разогнаться автомобиль на этой дороге?
2. Определите скорость автомобиля при прохождении точек C, D и B во время заезда (см. рисунок).
3. Найдите общее время прохождения полуокружности AB.

Указание: считайте известной константой $\beta \equiv \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx 1{,}311$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на динамику движения по окружности с ограниченной силой. Вертикальные силы скомпенсированы, единственная горизонтальная сила — сила трения колёс о дорогу. Её модуль не больше μmg, а направление водитель выбирает сам (руль и газ/тормоз). Эту силу приходится делить между двумя задачами: касательная составляющая разгоняет, нормальная удерживает на окружности. Самый быстрый заезд — когда трение всё время максимально,

$F_{тр} = \mu mg$, и в каждый момент разгон наибольший из возможных при данной скорости. Ключевой закон — второй закон Ньютона в проекциях на касательную и нормаль.

Обозначения. m — масса автомобиля; v — его скорость; s — путь, пройденный от A по дуге; α — угол между скоростью $\vec{v}$ и силой трения $\vec{F}_{тр}$; ось τ — по скорости, ось n — к центру O (рис. 1).

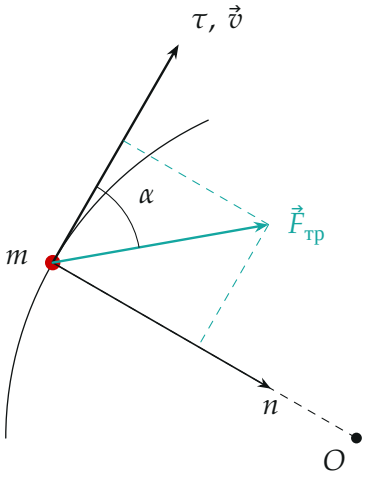


Рис. 1. Автомобиль на дуге (вид сверху). Сила трения под углом α к скорости раскладывается на касательную (разгоняет) и нормальную (поворачивает) составляющие.

Пункт 1. Максимальная скорость.

1. Второй закон Ньютона для автомобиля в векторной форме: $m\vec{a} = \vec{F}_{тр}$ (сила тяжести и реакция опоры вертикальны и уравновешены, $N = mg$). В проекциях на касательную τ и на нормаль n при $F_{тр} = \mu mg$:

$$\tau:\ m\frac{dv}{dt} = \mu mg\cos\alpha, \qquad n:\ m\frac{v^2}{R} = \mu mg\sin\alpha.$$

Нормальная проекция ускорения — центростремительное ускорение v^2/R, его даёт только трение.

2. Предел скорости. Из второго уравнения $v^2 = \mu gR\sin\alpha \le \mu gR$. Наибольшая скорость — когда вся сила трения уходит на поворот, $\alpha =$

90°:

$$v_m = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}5 \cdot 10 \cdot 80} = 20 \text{ м/с}.$$

При $\alpha = 90°$ касательное ускорение равно нулю — разгон заканчивается. Дальше машина едет с постоянной скоростью v_m, сила трения направлена к центру.

Пункт 2. Скорости в точках C, D, B.

3. Связь α с путём. Пока идёт разгон, скорость в каждый момент — наибольшая возможная, и оба уравнения пункта 1 выполняются одновременно. Касательное уравнение перепишем через путь: $dt = ds/v$, поэтому

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = \mu g \cos\alpha.$$

Нормальное уравнение даёт $v^2 = \mu g R \sin\alpha$; за малый путь ds угол меняется на $d\alpha$, и $d(v^2) = \mu g R \cos\alpha\, d\alpha$. Подставляем:

$$\frac{1}{2}\mu g R \cos\alpha \frac{d\alpha}{ds} = \mu g \cos\alpha \;\Rightarrow\; \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2}{R}.$$

Угол растёт с путём равномерно. На старте $v = 0$, значит $\sin\alpha = 0$, $\alpha = 0$ (вся сила — на разгон). Суммируя приращения от старта до пути s:

$$\alpha(s) = \frac{2s}{R}, \qquad v^2(s) = \mu g R \sin\frac{2s}{R} = v_m^2 \sin\frac{2s}{R}.$$

4. Где кончается разгон. $\alpha = 90°$ при $2s/R = \pi/2$, то есть $s = \pi R/4$ — четверть полуокружности, дуга 45°. Это ровно точка C. До C сила трения поворачивается от касательной к радиусу (рис. 2), после C — направлена к центру, скорость постоянна.

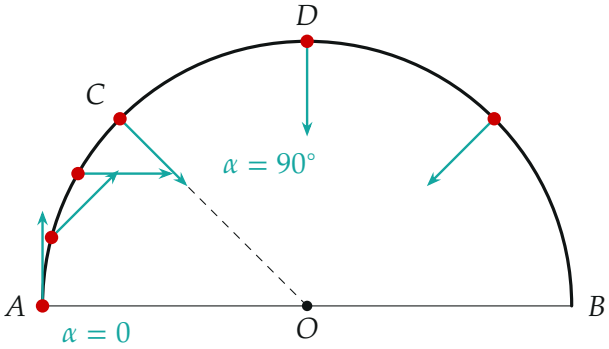


Рис. 2. Направление силы трения (бирюзовые стрелки, одной длины μmg) в точках $s = 0, 15°, 30°, 45°$ дуги и дальше. Угол с касательной $\alpha = 2s/R$ растёт до $90°$ в точке C.

Значит, во всех трёх точках скорость максимальная:

$$v_C = v_D = v_B = v_m = 20 \text{ м/с}.$$

Пункт 3. Время заезда.

5. Участок AC (разгон). В касательное уравнение подставим $\sin\alpha = v^2/v_m^2$, $\cos\alpha = \sqrt{1-(v/v_m)^4}$ (α от 0 до $90°$, косинус положителен):

$$\frac{dv}{dt} = \mu g\sqrt{1-\frac{v^4}{v_m^4}}.$$

Введём $x = v/v_m$: $dv = v_m\,dx$, и

$$dt = \frac{v_m}{\mu g}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Суммируем от старта ($x = 0$) до точки C ($x = 1$) и пользуемся указанием:

$$t_{AC} = \beta\sqrt{\frac{R}{\mu g}} = 1{,}311\cdot 4 \text{ с} \approx 5{,}24 \text{ с}.$$

6. Участок CB (равномерно). Длина дуги CB — три четверти полу-

окружности, $\frac{3}{4}\pi R$, скорость v_m:

$$t_{CB} = \frac{3\pi R}{4v_m} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{\mu g}} \approx 9{,}42 \text{ с}.$$

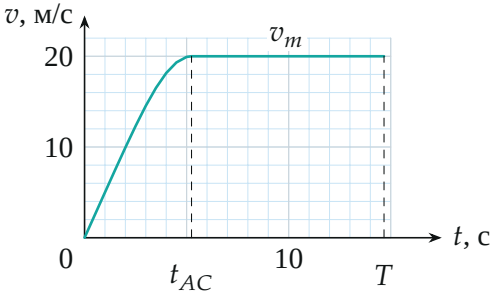


Рис. 3. Скорость от времени (численное решение уравнения пункта 5): разгон до v_m за $t_{AC} \approx 5{,}2$ с, затем равномерно до $T \approx 14{,}7$ с.

7. Полное время

$$T = t_{AC} + t_{CB} = \left(\beta + \frac{3\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{R}{\mu g}} \approx 14{,}7 \text{ с}.$$

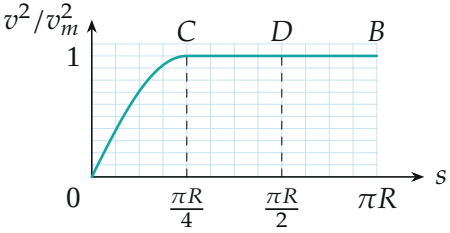


Рис. 4. Квадрат скорости от пути: $v^2 = v_m^2 \sin(2s/R)$ до точки C, дальше постоянный.

Обратите внимание. Ехать с самого старта «по максимуму на разгон» ($\alpha = 0$) нельзя: при любой скорости $v > 0$ нужна центростремительная сила mv^2/R, и часть трения обязательно уходит на поворот. Оптимальный режим — именно $v^2 = \mu g R \sin\alpha$: скорость в каждой точке наибольшая, допустимая для удержания на дуге.

Соберём ответ. $v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с; $v_C = v_D = v_B = v_m$; $T = (\beta + \frac{3\pi}{4})\sqrt{R/(\mu g)} \approx 14{,}7$ с.

Проверка. Размерность $\sqrt{R/(\mu g)} = \sqrt{\text{м}/(\text{м/с}^2)} = \text{с}$ — верно. Второй способ для t_{AC}: из $v = v_m\sqrt{\sin(2s/R)}$ и $dt = ds/v$ замена $x^2 = \sin(2s/R)$ даёт $ds = R\,x\,dx/\sqrt{1-x^4}$ и тот же интеграл β. Численное решение уравнения пункта 5 (рис. 3) даёт $t_{AC} = 5{,}23$ с. Без поворота (по прямой с ускорением μg) путь $\pi R/4 = 62{,}8$ м прошли бы за $\sqrt{2 \cdot 62{,}8/5} = 5{,}0$ с — чуть быстрее, как и должно быть: на дуге часть трения уходит на поворот.

Ответ. 1) $v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с; 2) $v_C = v_D = v_B = 20$ м/с; 3) $T = \left(\beta + \dfrac{3\pi}{4}\right)\sqrt{\dfrac{R}{\mu g}} \approx 14{,}7$ с.