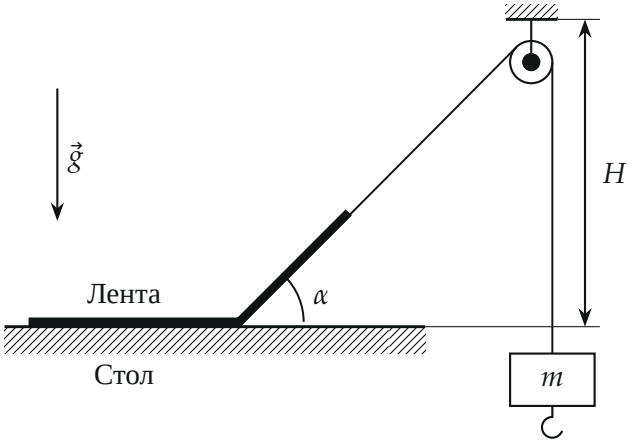
Клейкая лента

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Клейкая лента».

Длинная клейкая лента шириной $d = 2$ см приклеена к горизонтальной поверхности стола. Известно, что для того, чтобы оторвать единицу площади такой ленты от стола, нужно совершить работу $\sigma = 10$ Дж/м^2 (считайте, что эта величина не зависит от угла, под которым тянут ленту). Лента является невесомой и нерастяжимой.

1. Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?
2. Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте $H = 1$ м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил $\alpha_1 = 45°$. На другой конец нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза m система будет покоиться?
3. К первому грузу с максимально возможной массой m из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой M и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом $\alpha_2 = 30°$ к горизонту. Найдите массу второго груза M, расстояние Δh, на которое в результате переместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения a_1 и в момент остановки a_2.



Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии с «поверхностной» работой. Лента невесома и нерастяжима, поэтому вся работа силы, которая тянет её конец, уходит на отрыв ленты от стола: σ на каждый квадратный метр. Отсюда — сила отрыва при данном угле (пункты 1 и 2). В пункте 3 грузы в начале и в конце покоятся, и работа по отрыву ленты целиком берётся из потенциальной энергии грузов; ускорения в крайних точках даёт второй закон Ньютона.

Обозначения. F (или T) — сила натяжения наклонного участка ленты; α — угол наклона этого участка к горизонту, отсчитанный от приклеенной части ленты (рис. 1); Δl — длина участка, оторвавшегося за малое время; Δx — перемещение конца ленты вдоль силы.

Пункт 1. Наименьшая сила отрыва.

1. Геометрия отрыва. Тянем конец ленты постоянной силой $\vec{F}$ под углом α. Оторвался участок длиной Δl: точка излома O сдвинулась вдоль стола на Δl, наклонный участок стал длиннее на Δl и сместился параллельно себе (рис. 1). Конец ленты при этом сдвинулся вдоль силы на

$$\Delta x = \Delta l - \Delta l \cos\alpha = \Delta l\,(1 - \cos\alpha)\,:$$

наклонный участок удлинился на Δl (конец уходит вперёд на Δl), а точка излома ушла на Δl вдоль стола, что в проекции на направление силы даёт $\Delta l \cos\alpha$ назад.

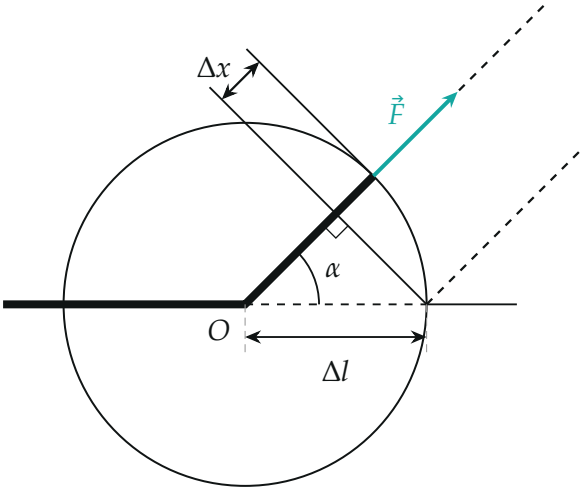


Рис. 1. Отрыв участка Δl (рисунок организаторов). Наклонный участок ленты сдвигается параллельно себе; конец ленты проходит вдоль силы путь Δx — разность между удлинением Δl и проекцией $\Delta l \cos\alpha$.

2. Закон сохранения энергии для ленты за время отрыва участка Δl: лента невесома, кинетической энергии у неё нет, поэтому работа силы F равна работе отрыва площади $d\,\Delta l$:

$$F\,\Delta x = \sigma d\,\Delta l \;\Rightarrow\; F(\alpha) = \frac{\sigma d}{1-\cos\alpha}.$$

3. Минимум. Знаменатель $1-\cos\alpha$ наибольший, равный 2, при $\alpha = \pi$:

$$F_{\min} = \frac{\sigma d}{2} = 0{,}1\ \text{Н}.$$

Тянуть надо горизонтально, вдоль стола, назад над приклеенной частью ленты — лента загнута «на себя» (рис. 2). Тогда конец ленты проходит путь $2\Delta l$ на каждый оторванный Δl — как свободный конец нити на подвижном блоке.



Рис. 2. Наименьшая сила отрыва: ленту тянут вдоль стола назад, над её приклеенной частью ($\alpha = \pi$).

Пункт 2. Наибольшая масса груза.

4. Натяжение. Блок невесом и мал, нить невесома, поэтому натяжение нити и наклонного участка ленты одно и то же, T. Второй закон Ньютона для покоящегося груза в проекции на вертикаль: $T = mg$.

5. Условие покоя. Лента не отрывается, пока натяжение не больше силы отрыва при угле α_1: $T \le F(\alpha_1)$. Наибольшая масса — при равенстве:

$$m = \frac{\sigma d}{g\,(1 - \cos\alpha_1)} = \frac{10 \cdot 0{,}02}{10 \cdot (1 - 0{,}707)} \approx 0{,}068 \text{ кг} = 68 \text{ г}.$$

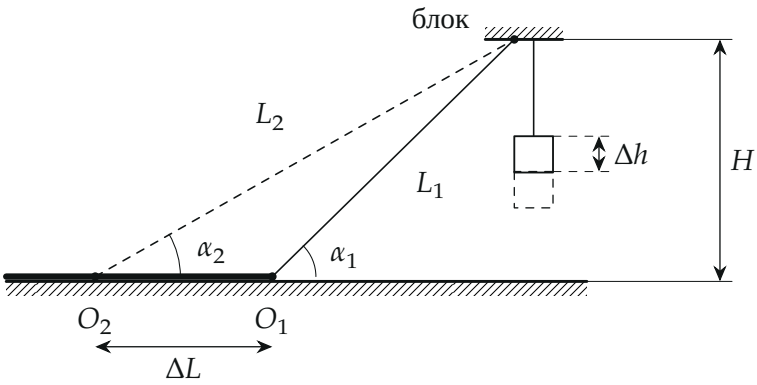


Рис. 3. Начальное (сплошная) и конечное (пунктир) положения: точка отрыва уходит от O_1 к O_2 на ΔL, грузы опускаются на Δh (масштаб соблюдён, $H = 1$ м).

Пункт 3. Второй груз, путь и ускорения.

6. Оторванная длина. Точка отрыва стоит на горизонтальном расстоянии $H/\operatorname{tg}\alpha$ от блока (рис. 3). За время движения она ушла от O_1 к O_2:

$$\Delta L = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha_1} = (\sqrt{3} - 1)H \approx 0{,}732 \text{ м}.$$

7. Путь грузов. Лента и нить нерастяжимы, их общая длина неизменна. Длина наклонного участка $L = H/\sin\alpha$. Длина «ленты на столе» уменьшилась на ΔL, эта длина ушла в наклонный участок (стал L_2 вместо L_1) и в вертикальную нить (удлинилась на Δh):

$$\Delta L + L_1 = L_2 + \Delta h,$$

$$\Delta h = H\left(\frac{1-\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} - \frac{1-\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\right) = H\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}\right) \approx 0{,}146 \text{ м}.$$

8. Закон изменения механической энергии системы «грузы + нить + лента» от отпускания до остановки: грузы в начале и в конце покоятся, лента и нить невесомы, блок без трения. Вся убыль потенциальной энергии грузов ушла на отрыв площади $d\,\Delta L$:

$$(m+M)\,g\,\Delta h = \sigma d\,\Delta L,$$

$$M = \frac{\sigma d\,\Delta L}{g\,\Delta h} - m = \frac{0{,}2\cdot 0{,}732}{10\cdot 0{,}146} - 0{,}068 \approx 0{,}032 \text{ кг}.$$

Получилось $m + M \approx 0{,}100$ кг.

9. Ускорения. Во время движения лента всё время отрывается, поэтому натяжение равно силе отрыва при текущем угле: $T = F(\alpha)$. Второй закон Ньютона для двух грузов в проекции на вертикаль вниз:

$$(m+M)\,a = (m+M)\,g - \frac{\sigma d}{1-\cos\alpha}.$$

В начале ($\alpha_1 = 45°$) $T = mg$ меньше веса $(m+M)g$ — грузы ускоряются вниз:

$$a_1 = g - \frac{\sigma d}{(m+M)(1-\cos\alpha_1)} = 10 - 6{,}83 \approx 3{,}2 \text{ м/с}^2.$$

В конце ($\alpha_2 = 30°$) угол меньше, сила отрыва больше веса — проекция

ускорения отрицательна, грузы тормозят; модуль

$$a_2 = \frac{\sigma d}{(m+M)(1-\cos\alpha_2)} - g = 14{,}93 - 10 \approx 4{,}9\ \text{м/с}^2.$$

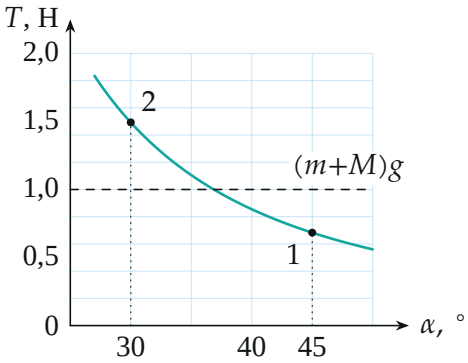


Рис. 4. Сила отрыва $T(\alpha) = \sigma d/(1-\cos\alpha)$ и вес грузов $(m+M)g = 1$ Н. В начале (точка 1) вес больше силы отрыва — грузы разгоняются, в конце (точка 2) меньше — тормозят.

Обратите внимание. Пока грузы движутся, натяжение не равно их весу: оно равно силе отрыва $F(\alpha)$, а разность идёт на ускорение. Поэтому закон сохранения энергии пишем только между состояниями покоя — в начале и в конце, где кинетической энергии нет.

Соберём ответ. 1) $\alpha = \pi$, вдоль стола назад; 2) $m = \dfrac{\sigma d}{g(1-\cos\alpha_1)} \approx 68$ г; 3) $M = \dfrac{\sigma d\,\Delta L}{g\,\Delta h} - m \approx 32$ г, $\Delta h \approx 0{,}146$ м, $a_1 \approx 3{,}2\ \text{м/с}^2$, $a_2 \approx 4{,}9\ \text{м/с}^2$.

Проверка. Размерность $\sigma d/g = (\text{Дж/м}^2)\cdot\text{м}/(\text{м/с}^2) = $ кг — верно. Предел $\alpha \to 0$ (тянут вдоль приклеенной ленты вперёд): $F \to \infty$ — нерастяжимую ленту так не оторвать, верно. Второй способ для Δh: из $\Delta L + L_1 - L_2 = 0{,}732 + 1{,}414 - 2{,}000 = 0{,}146$ м — то же. Энергия: $(m+M)g\Delta h = 0{,}146$ Дж и $\sigma d\Delta L = 0{,}146$ Дж — сходится.

Ответ. 1) $\alpha = \pi$: тянуть вдоль стола назад, над приклеенной частью ленты; 2) $m = \dfrac{\sigma d}{(1-\cos\alpha_1)\,g} \approx 0{,}068$ кг; 3) $M = \dfrac{\sigma d\,\Delta L}{g\,\Delta h} - m \approx 32$ г,

$\Delta h \approx 0{,}146$ м, $a_1 \approx 3{,}2$ м/с^2, $a_2 \approx 4{,}9$ м/с^2.