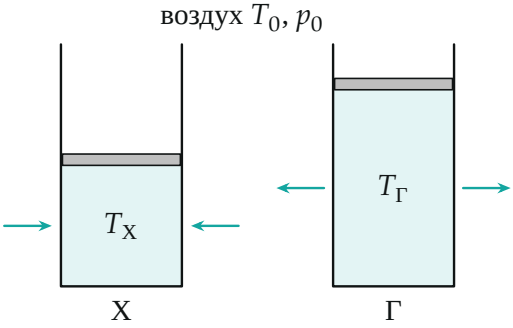
Быстрые поршни

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 11 класс, задача 3] «Быстрые поршни».

Два одинаковых вертикальных тонкостенных цилиндрических сосуда внутреннего радиуса r, в которых под поршнями находятся равные количества идеального газа, поставили в комнату с температурой воздуха T_0. В одном сосуде газ имеет температуру $T_\text{Х} < T_0$, а в другом — температуру $T_\Г > T_0$. Дно цилиндров и поршень теплоизолированные. Мощность тепловых потерь через боковые стенки прямо пропорциональна произведению площади контакта и разности температур содержимого сосуда и окружающей среды: $N = \alpha S \Delta T$, где α — некоторая константа. Атмосферное давление p_0, поршни легкие. Молярная теплоемкость газа в сосудах при постоянном давлении C_p. Известно, что максимальные скорости, с которыми двигались поршни каждого из цилиндров вплоть до установления в них комнатной температуры равны по модулю ($v_\text{Х}^\text{max} = v_\Г^\text{max}$). Выразите $T_\Г$ через T_0 и $T_\text{Х}$.



Поясняющий рисунок: холодный (Х) и горячий (Г) сосуды; теплота идёт через боковые стенки — в холодный внутрь, из горячего наружу.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для изобарного процесса с теплообменом через стенку. Поршень лёгкий, поэтому газ всё время при давлении p_0: высота поршня пропорциональна температуре, а вместе с ней — и площадь боковой стенки, через которую идёт тепло. Скорость поршня окажется функцией одной только температуры газа, $v \propto T|T_0 - T|$. Остаётся найти наибольшую

скорость на пути «от начальной температуры до T_0» для каждого сосуда и приравнять.

Обозначения. ν — количество газа в сосуде; h — высота поршня над дном; T — температура газа в момент t; $v = dh/dt$ — скорость поршня (вверх положительна); R — газовая постоянная.

1. Уравнение состояния. Второй закон Ньютона для лёгкого поршня даёт $p = p_0$ в любой момент. Уравнение Менделеева — Клапейрона для газа под поршнем и его изменение за малое время dt:

$$p_0\,\pi r^2 h = \nu R T, \qquad p_0\,\pi r^2\,dh = \nu R\,dT.$$

Отсюда $h = \dfrac{\nu R T}{\pi r^2 p_0}$ и $v = \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\nu R}{\pi r^2 p_0}\,\dfrac{dT}{dt}$.

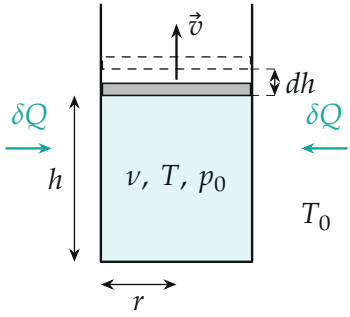


Рис. 1. Холодный сосуд: за время dt через боковую стенку площадью $2\pi rh$ приходит теплота δQ, газ нагревается на dT при давлении p_0, поршень поднимается на dh.

2. Тепловой баланс. Через боковую стенку площадью $S = 2\pi rh$ за время dt в газ приходит теплота $\delta Q = \alpha \cdot 2\pi rh\,(T_0 - T)\,dt$ (у горячего газа $T > T_0$, и $\delta Q < 0$ — тепло уходит; дно и поршень тепло не проводят). Процесс изобарный, поэтому первый закон термодинамики даёт $\delta Q = \nu C_p\,dT$:

$$\nu C_p\,\frac{dT}{dt} = 2\pi r\alpha\,h\,(T_0 - T).$$

3. Скорость как функция температуры. Подставим dT/dt из пункта

2 и h из пункта 1 в выражение для v:

$$v = \frac{\nu R}{\pi r^2 p_0} \cdot \frac{2\pi r\alpha}{\nu C_p} \cdot \frac{\nu R T}{\pi r^2 p_0} (T_0 - T) = a\,T\,(T_0 - T), \qquad a = \frac{2\alpha\nu R^2}{\pi C_p\, p_0^2\, r^3}.$$

Постоянная a у обоих сосудов одна и та же (сосуды одинаковые, газа поровну). Зависимость $v(T)$ — парабола с нулями при $T = 0$ и $T = T_0$ и вершиной при $T = T_0/2$, где $v = aT_0^2/4$ (рис. 2). Холодный поршень едет вверх ($v > 0$), горячий — вниз ($v < 0$). Каждый сосуд проходит свой участок параболы: от начальной температуры до T_0.

4. Горячий сосуд. Температура падает от T_Γ до T_0. На участке $T > T_0$ модуль $|v| = aT(T - T_0)$ растёт с T, поэтому наибольший он в самом начале:

$$v_\Gamma^{\max} = a\,T_\Gamma\,(T_\Gamma - T_0).$$

5. Холодный сосуд. Температура растёт от T_X до T_0. Здесь два случая.

Если $T_\text{X} \geq T_0/2$, газ стартует правее вершины параболы, скорость только убывает, максимум — в начале:

$$v_\text{X}^{\max} = a\,T_\text{X}\,(T_0 - T_\text{X}).$$

Если $T_\text{X} < T_0/2$, газ стартует левее вершины: сначала поршень разгоняется, проходит вершину при $T = T_0/2$, затем тормозит (рис. 2):

$$v_\text{X}^{\max} = \frac{aT_0^2}{4}.$$

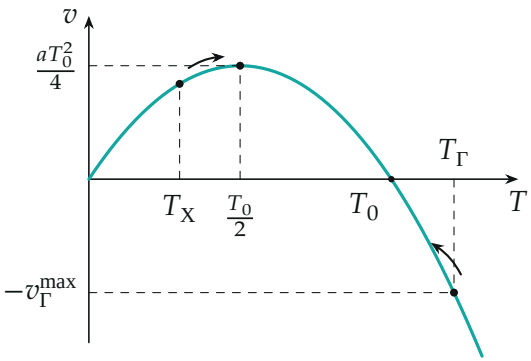


Рис. 2. Скорость поршня от температуры газа, $v = aT(T_0 - T)$ (построено при $T_X = 0{,}3T_0$). Холодный газ идёт по параболе вправо от T_X через вершину, горячий — влево от T_Γ; стрелки — направление процесса.

6. Приравниваем $v_\Gamma^{max} = v_X^{max}$.

При $T_X \geq T_0/2$: $T_\Gamma(T_\Gamma - T_0) = T_X(T_0 - T_X)$, то есть

$$T_\Gamma^2 - T_0T_\Gamma - T_X(T_0 - T_X) = 0 \;\Rightarrow\; T_\Gamma = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_X(T_0 - T_X)}}{2}$$

(второй корень отрицателен, отбрасываем).

При $T_X < T_0/2$: $T_\Gamma(T_\Gamma - T_0) = T_0^2/4$, то есть

$$T_\Gamma^2 - T_0T_\Gamma - \frac{T_0^2}{4} = 0 \;\Rightarrow\; T_\Gamma = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,T_0 \approx 1{,}21\,T_0.$$

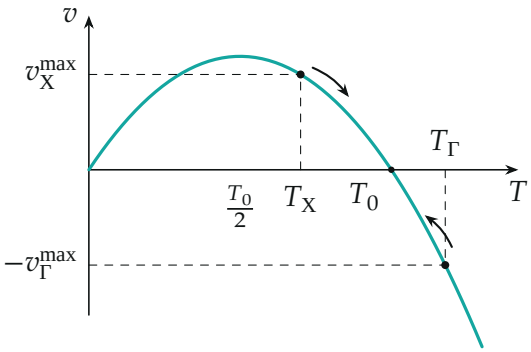


Рис. 3. Случай $T_X \geq T_0/2$ (построено при $T_X = 0{,}7T_0$, тогда $T_\Gamma = 1{,}18T_0$): оба максимума — в начальных точках, на одной высоте по модулю.

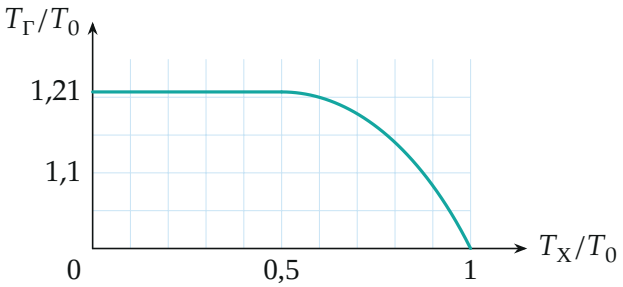


Рис. 4. Ответ: T_Γ от T_X. Левее $T_0/2$ — постоянная $\frac{1+\sqrt{2}}{2}T_0$, правее — убывает до T_0 при $T_X \to T_0$; на стыке ветви совпадают.

Обратите внимание. Наибольшая скорость холодного поршня — не обязательно в начале. Если газ очень холодный ($T_X < T_0/2$), поршень сначала разгоняется: площадь стенки растёт вместе с T быстрее, чем падает разность температур.

Соберём ответ.

$$T_\Gamma = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_X(T_0 - T_X)}}{2} \text{ при } T_X \geq \frac{T_0}{2};$$

$$T_\Gamma = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,T_0 \text{ при } T_X < \frac{T_0}{2}.$$

Проверка. Размерность: $[a] = \text{м}/(\text{с}\cdot\text{К}^2)$, так что aT^2 — скорость, верно. Предел $T_X \to T_0$: холодный газ почти не греется, $v_X^{\max} \to 0$, и формула даёт $T_\Gamma \to T_0$ — верно. На стыке $T_X = T_0/2$ первая формула даёт $\frac{T_0+\sqrt{2}T_0}{2}$ — совпадает со второй, ответ непрерывен.

Ответ. $T_\Gamma = \dfrac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_X(T_0 - T_X)}}{2}$ при $T_X \geqslant T_0/2$; $T_\Gamma = \frac{1+\sqrt{2}}{2}T_0$ при $T_X < T_0/2$.