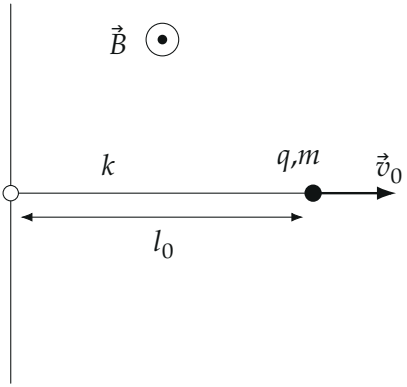
# Заряд на резинке

**Задача 4.** [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 11 класс, задача 4] «Заряд на резинке».

На длинную закреплённую гладкую спицу насажено лёгкое маленькое колечко, к которому прикреплён лёгкий резиновый шнур. В нерастянутом состоянии шнура его длина равна $l_0$, коэффициент жёсткости равен $k$. К другому его концу прикреплён точечный положительный заряд $q$ массы $m$. Система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости рисунка. В начальный момент времени расстояние от заряда до спицы равно $l_0$, а его скорость направлена перпендикулярно спице от неё и равна $v_0$.




1. Определите траекторию заряда.
2. Определите дрейфовую скорость заряда.

*Примечания.* На заряд действуют силы только со стороны шнура и магнитного поля. Заданные по условию величины связаны соотношением: $mv_0 < qBl_0$. Под дрейфовой скоростью понимается модуль вектора средней скорости за время $T \gg m/qB$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение заряда в магнитном поле под действием ещё и упругой силы. Колечко лёгкое, спица гладкая, поэтому спица действует на колечко только перпендикулярно себе — и шнур всегда перпендикулярен спице: упругая сила горизонтальна. Пока шнур растянут, на заряд действуют упругая сила и сила

Лоренца; когда заряд ближе к спице, чем $l_0$, шнур провисает, и заряд крутится по окружности в магнитном поле. Ключевые законы — второй закон Ньютона в проекциях и закон сохранения энергии (сила Лоренца работы не совершает).

**Обозначения.** Ось $x$ — от спицы, перпендикулярно ей, ось $y$ — вдоль спицы вверх, начало — в начальном положении заряда; тогда удлинение шнура равно $x$ при $x > 0$. Поле направлено к нам (рис. 1). $\Omega = qB/m$ — циклотронная частота, $R = mv_0/(qB) = v_0/\Omega$ — радиус окружности со скоростью $v_0$.

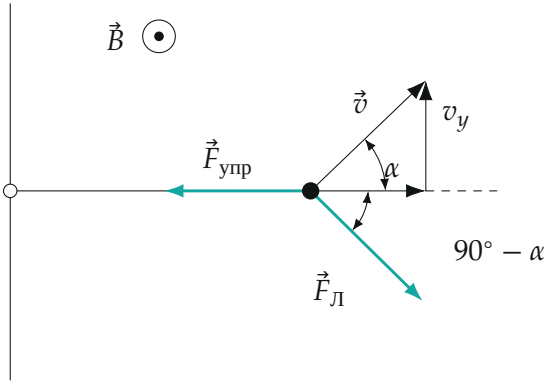



*Рис. 1. Силы на заряд при натянутом шнуре: упругая сила вдоль шнура к спице, сила Лоренца перпендикулярно скорости.*

**Пункт 1. Траектория.**

**1. Второй закон Ньютона для заряда.** $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + q\,\vec{v} \times \vec{B}$. Сила Лоренца $q\vec{v} \times \vec{B}$ при поле к нам повёрнута от скорости на 90° по часовой стрелке, её проекции $(qBv_y,\ -qBv_x)$. Упругая сила горизонтальна: $-kx$ при $x > 0$ и ноль при $x \le 0$. В проекциях, пока шнур натянут:

$$x:\ m\ddot{x} = -kx + qB\dot{y}, \qquad y:\ m\ddot{y} = -qB\dot{x}.$$

**2. Связь $v_y$ с $x$.** Уравнение для $y$ верно при любом состоянии шнура. Умножим его на $dt$: $m\,dv_y = -qB\,dx$, то есть за любой малый промежуток $dv_y = -\Omega\,dx$. Суммируем от старта ($v_y = 0$, $x = 0$):

$$v_y = -\Omega x.$$

**3. Закон сохранения энергии.** Сила Лоренца перпендикулярна скорости и работы не совершает, поэтому при натянутом шнуре

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2} + \frac{kx^2}{2} \;\Rightarrow\; v_x^2 = v_0^2 - \beta^2 x^2, \qquad \beta^2 = \Omega^2 + \frac{k}{m}.$$

**4. Уравнение траектории при натянутом шнуре.** Делим проекции скорости:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\Omega x}{\sqrt{v_0^2 - \beta^2 x^2}} \;\Rightarrow\; dy = \gamma\, d\Big(\sqrt{a^2 - x^2}\Big),$$

где $a = v_0/\beta$, $\gamma = \Omega/\beta < 1$. Суммируем от старта ($x = 0$, $y = 0$): $y = \gamma(\sqrt{a^2 - x^2} - a)$, или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y+b)^2}{b^2} = 1,$$

$$a = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = \gamma R, \qquad b = \gamma a = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = \gamma^2 R.$$

Это эллипс с центром $(0, -b)$, полуосью $a$ поперёк спицы и $b$ вдоль неё. Заряд проходит его правую половину: уходит от спицы на $a$ и возвращается в точку $(0, -2b)$ со скоростью $v_0$, направленной к спице (на этой точке $v_y = 0$, а по энергии $|v_x| = v_0$).

Второй способ. Подставим $v_y = -\Omega x$ в уравнение для $x$: $\ddot{x} = -\beta^2 x$ — гармонические колебания, $x = a\sin\beta t$, $y = -b(1 - \cos\beta t)$: тот же эллипс, пройденный за половину периода $\pi/\beta$.

**5. Шнур провис ($x < 0$).** Действует только сила Лоренца, скорость по модулю $v_0$, заряд движется по окружности радиуса $R = mv_0/(qB)$. Сила Лоренца на скорость $-v_0$ по $x$ направлена вверх, поэтому центр окружности — над точкой $(0, -2b)$ на расстоянии $R$. Заряд проходит левую полуокружность и возвращается на прямую $x = 0$ в точке $(0, 2R - 2b)$ со скоростью $v_0$ от спицы — как в самом начале. До спицы не долетает: самая левая точка окружности на расстоянии $l_0 - R > 0$ от спицы, ведь

$mv_0 < qBl_0$.

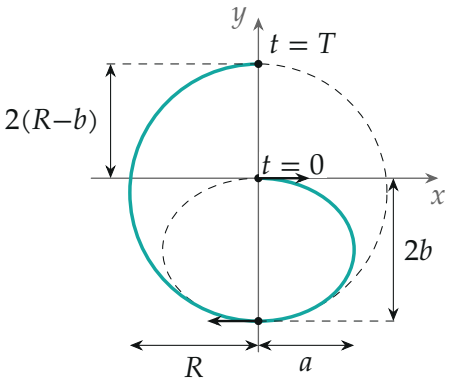



*Рис. 2. Один период: правая половина эллипса (шнур натянут) и левая половина окружности радиуса $R$ (шнур провис). Построено при $\gamma = 0{,}745$; пунктир — полные эллипс и окружность.*

**6. Склейка.** В точках $x = 0$ скорость перпендикулярна спице и по модулю $v_0$ на обеих кривых — переход плавный, без излома. Дальше всё повторяется со сдвигом вдоль спицы: траектория — чередование половинок эллипса (полуоси $a$, $b$) и половинок окружности $R$ (рис. 3).

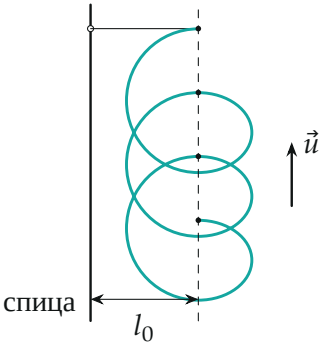



*Рис. 3. Три периода (численное интегрирование уравнений движения даёт ту же кривую). Заряд «шагает» вдоль спицы, средняя скорость $\vec{u}$ направлена вверх.*

**Пункт 2. Дрейфовая скорость.**

**7. Период.** Половина эллипса проходится за половину периода колебаний $x(t)$, $\pi/\beta$; половина окружности — за $\pi R/v_0 = \pi/\Omega$:

$$T = \frac{\pi}{\beta} + \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi m}{qB}\left(\frac{qB}{\sqrt{km + (qB)^2}} + 1\right).$$

**8. Смещение за период.** За период заряд вернулся на $x = 0$ с той же скоростью и сместился вдоль спицы на $2R - 2b$ (рис. 2). Значит, за время $T \gg m/(qB)$ средняя скорость направлена вдоль спицы и равна

$$u = \frac{2(R-b)}{T} = \frac{2v_0(1-\gamma^2)}{\pi(1+\gamma)} = \frac{2v_0}{\pi}(1-\gamma),$$

$$u = \frac{2kmv_0}{\pi\sqrt{km + (qB)^2}\,(qB + \sqrt{km + (qB)^2})}.$$

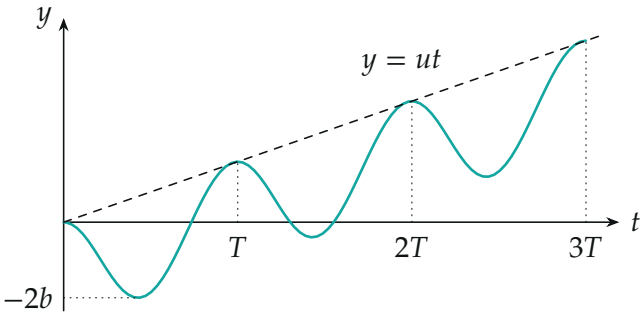



*Рис. 4. Координата вдоль спицы от времени (численное решение при $\gamma = 0{,}745$, $m = q = B = v_0 = 1$, $k = 0{,}8$). Пунктир — равномерный дрейф $y = ut$; численно $u = 0{,}1621$, формула даёт $2(1-\gamma)/\pi = 0{,}1621$.*

**Обратите внимание.** Сначала заряд идёт *вниз* (против направления дрейфа): за натянутую половину он смещается вниз на $2b$, за свободную — вверх на $2R$. Дрейф есть потому, что эллипс «сжат» шнуром: $b < R$.

**Соберём ответ.** Траектория — чередование половинок эллипса с полуосями $a = \gamma R$ (поперёк спицы), $b = \gamma^2 R$ (вдоль спицы) и половинок

окружности $R = mv_0/(qB)$, сшитых без излома на прямой $x = 0$; здесь $\gamma = qB/\sqrt{km + (qB)^2}$. Дрейфовая скорость $u = 2v_0(1 - \gamma)/\pi$.

**Проверка.** Размерность: $km$ и $(qB)^2$ — в кг$^2$/с$^2$, поэтому $\gamma$ безразмерна и $u$ — скорость. Пределы: $k \to 0$ — шнура нет, движение по окружности, $u \to 0$; $k \to \infty$ — заряд отражается от прямой $x = 0$ как от стенки, $\gamma \to 0$, $u \to 2v_0/\pi$: за время $\pi R/v_0$ сдвиг на диаметр $2R$ — верно. Численное интегрирование (рис. 4) даёт ту же скорость.

**Ответ.** 1) траектория — чередующиеся половинки эллипса (шнур натянут; полуоси $a = \dfrac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}}$ поперёк спицы и $b = \dfrac{qBmv_0}{km + (qB)^2}$ вдоль неё) и окружности радиусом $R = \dfrac{mv_0}{qB}$ (шнур провис), переходящие друг в друга без излома при $x = 0$; 2) $u = \dfrac{2v_0}{\pi}\left(1 - \dfrac{qB}{\sqrt{km + (qB)^2}}\right) = \dfrac{2kmv_0}{\pi s(qB + s)}$, где $s = \sqrt{km + (qB)^2}$.