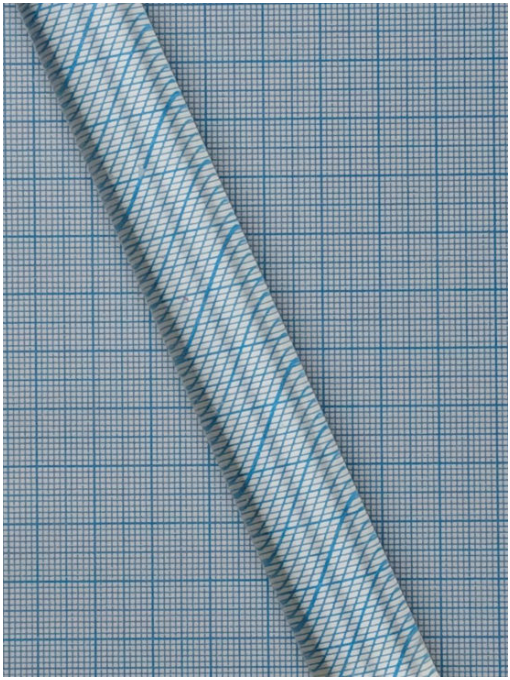
# Цилиндр

**Задача 5.** [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Цилиндр».

У стеклянного цилиндра плоскостью, параллельной его оси, отрезана часть. Цилиндр лежит плоской поверхностью на листе миллиметровой бумаги (см. рис.). Его сфотографировали с большого расстояния камерой, направленной перпендикулярно листу миллиметровки.



1. Найдите показатель преломления стекла $n$.
2. Какая часть радиуса цилиндра отсечена плоскостью?

*Примечания.* Для итоговых геометрических построений и получения числовых значений расстояний и углов, необходимых для решения задачи, используйте фотографию, выданную на отдельном листе. Не забудьте сдать этот лист вместе с остальными.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на преломление света на цилиндрической поверхности — по сути, на толстую цилиндрическую линзу. Вдоль оси цилиндр ничего не искажает, а поперёк оси

увеличивает миллиметровку: линии бумаги под цилиндром изломаны и растянуты. Из фотографии можно снять два числа: увеличение $\Gamma$ и ширину полосы бумаги, видимой сквозь цилиндр. Оба зависят от двух неизвестных — $n$ и расстояния от оси до среза, — и из двух уравнений находим обе.

**Обозначения.** $R$ — радиус цилиндра; $O$ — его ось; $h$ — расстояние от оси до плоскости среза (она же — лист бумаги), $h > 0$, если осталось больше половины цилиндра; $\xi = h/R$; $y = R - h$ — толщина отсечённого сегмента; $x$ — расстояние точки бумаги от плоскости симметрии; ось камеры — вертикаль.

**1. Вдоль оси увеличения нет.** Камера далеко, лучи в неё идут параллельно. Луч, лежащий в плоскости, содержащей ось, падает на поверхность цилиндра так, что нормаль к поверхности лежит в сечении, перпендикулярном оси; составляющая сдвига вдоль оси не возникает. На фото это видно так: линия миллиметровки и её изображение под цилиндром пересекаются на оси цилиндра (рис. 4).

**2. Увеличение поперёк оси.** Рассмотрим точку $P$ бумаги на малом расстоянии $x$ от плоскости симметрии (рис. 1). В камеру попадает тот луч из $P$, который после преломления выходит вертикально. Пусть он выходит в точке $Q$ поверхности, радиус $OQ$ отклонён от вертикали на малый угол $\varphi$. Камера видит точку $P$ там, где вертикальный луч проходит над бумагой, — на расстоянии $\Gamma x = R\varphi$ от плоскости симметрии.

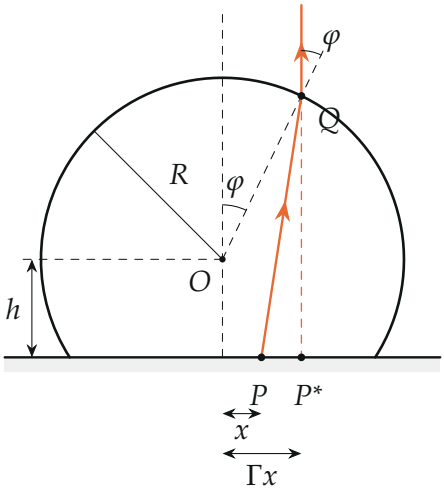



*Рис. 1. Луч из точки $P$ бумаги, вышедший в камеру вертикально. Камера видит $P$ в точке $P^*$ — под точкой выхода $Q$. Построено при найденных $n = 1{,}48$, $h = 0{,}54R$; угол $\varphi$ преувеличен.*

**Закон преломления в точке $Q$.** Нормаль — радиус $OQ$. Снаружи луч вертикален, угол с нормалью $\varphi$; внутри угол $\psi$, и для малых углов $\varphi = n\psi$. Внутри луч отклонён от вертикали на $\varphi - \psi = \varphi\,\frac{n-1}{n}$.

**Геометрия.** Точка $Q$ стоит на высоте $\approx R+h$ над бумагой, по горизонтали на $R\varphi$ от плоскости симметрии. Луч внутри идёт от $P$ к $Q$, поэтому

$$R\varphi - x = (R+h)\,\varphi\,\frac{n-1}{n} \;\Rightarrow\; x = \frac{\varphi\,(R-(n-1)h)}{n}.$$

Увеличение

$$\Gamma = \frac{R\varphi}{x} = \frac{nR}{R-(n-1)h} = \frac{n}{1-(n-1)\xi}.$$

**3. Видимая полоса.** На фото видно, что сквозь цилиндр видна не вся бумага, которую он закрывает: полоса уже диаметра. Её край — луч, приходящий в камеру по касательной к цилиндру, в точке на краю ($x = \pm R$, на уровне оси) (рис. 2). Угол падения там $90°$, внутри луч идёт под предельным углом к нормали (горизонтали): $\sin(90° - \theta) = 1/n$, где $\theta$ — угол с вертикалью, то есть $\cos\theta = 1/n$, $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{n^2-1}$. До бумаги он

опускается на $h$ и сдвигается внутрь на $h\,\mathrm{tg}\,\theta$. Лучей, которые дали бы в камеру точки бумаги дальше от середины, нет — эта бумага не видна сквозь цилиндр. Ширина видимой полосы:

$$d = 2(R - h\,\mathrm{tg}\,\theta) \;\Rightarrow\; \frac{d}{2R} = 1 - \xi\sqrt{n^2 - 1}.$$

Это возможно только при $h > 0$ — отрезали меньше половины цилиндра.

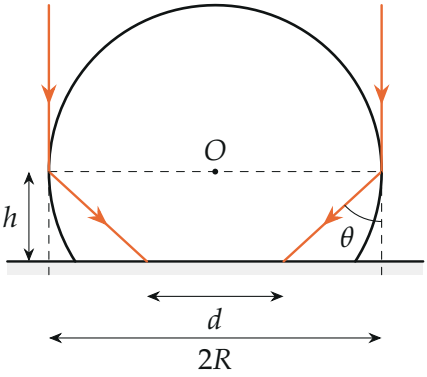



*Рис. 2. Крайние лучи, попадающие в камеру, касаются цилиндра. Внутри они идут под углом $\theta$ к вертикали, $\cos\theta = 1/n$, и ограничивают видимую полосу бумаги шириной $d$ (построено при $n = 1{,}48$, $h = 0{,}54R$).*

**4. Измерения по фотографии.** Проводим ось цилиндра, вертикальную линию миллиметровки и касательную к её изображению в точке на оси цилиндра (рис. 3). Из точки $C$ касательной опускаем перпендикуляр $CA$ на ось цилиндра; он пересекает исходную линию в $B$. Расстояния поперёк оси растянуты в Г раз:

$$\Gamma = \frac{AC}{AB} \approx 2{,}0.$$

По горизонтальной линии миллиметровки (по подобию для любой пря-

мой): цилиндр закрывает 22 мм бумаги, сквозь него видно 9 мм:

$$\frac{d}{2R} \approx \frac{9}{22} \approx 0{,}41.$$

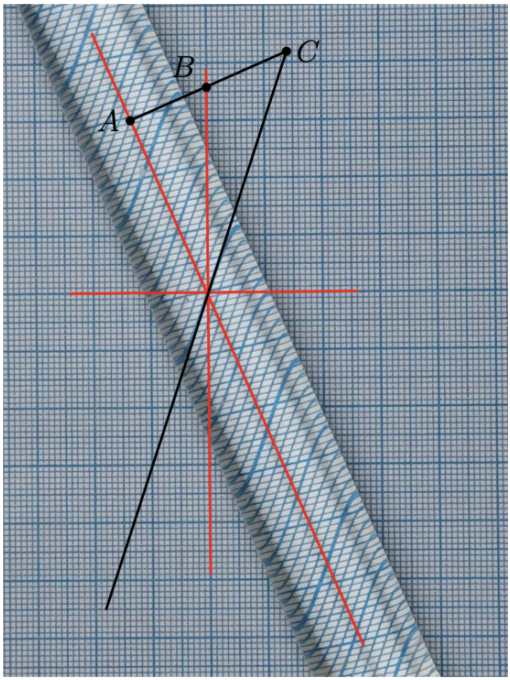



*Рис. 3. Построение на фотографии (организаторы): ось цилиндра и вертикальная линия бумаги (красные), касательная к изображению линии (чёрная); $\Gamma = AC/AB$.*

**5. Система уравнений.**

$$\frac{n}{1-(n-1)\xi} = 2, \qquad 1 - \xi\sqrt{n^2-1} = 0{,}41.$$

Выражаем $\xi$ из каждого:

$$\xi = \frac{2-n}{2(n-1)}, \qquad \xi = \frac{0{,}59}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Первая кривая быстро убывает с $n$, вторая — медленно; пересечение одно (рис. 4). Численно (половинным делением): $n = 1{,}48$, $\xi = 0{,}54$.

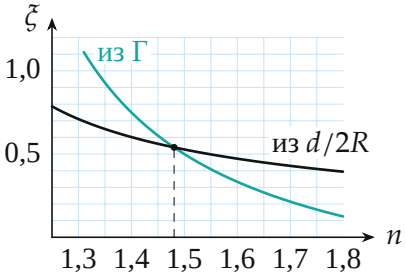



*Рис. 4. Два условия на $\xi$ и $n$: из увеличения (бирюзовая) и из ширины видимой полосы (чёрная). Пересечение $n = 1{,}48$, $\xi = 0{,}54$.*

**6. Отсечённая часть радиуса.** Плоскость среза на расстоянии $h = \xi R$ от оси, отсечён сегмент толщиной

$$\frac{y}{R} = \frac{R-h}{R} = 1 - \xi \approx 0{,}46.$$

**Обратите внимание.** Увеличение и ширина полосы измеряются в разных направлениях только поперёк оси; вдоль оси масштаб фото совпадает с бумагой, поэтому миллиметровка сама служит линейкой. И ещё: сквозь цилиндр видна полоса уже диаметра только потому, что срез ниже оси ($h > 0$); при срезе через ось ($h = 0$) было бы видно всё.

**Соберём ответ.** $n = 1{,}48$; отсечено $y/R = 1 - \xi \approx 0{,}46$ радиуса.

**Проверка.** Пределы формул: $n = 1$ — стекла нет, $\Gamma = 1$, $d = 2R$ — верно; $h = 0$ (полуцилиндр) — $\Gamma = n$, как у плоской поверхности для луча через центр, $d = 2R$. Точный (не параксиальный) расчёт хода луча для $n = 1{,}48$, $\xi = 0{,}54$ даёт $\Gamma = 2{,}03$ при $\varphi = 26°$ — параксиальное приближение хорошее. Чувствительность: $\Gamma = 2{,}0 \pm 0{,}1$ меняет $n$ на $\pm 0{,}05$, $d/2R = 0{,}41 \pm 0{,}02$ — на $\pm 0{,}01$; $n \approx 1{,}5$ — обычное стекло.

**Ответ.** 1) $n \approx 1{,}48$; 2) $\dfrac{y}{R} = \dfrac{R-h}{R} \approx 0{,}46$, где $h$ — расстояние от оси цилиндра до плоскости среза.