Утки в шприце

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 7 класс, практический тур, задача 2] «Утки в шприце».

Оборудование: шприц объёмом 20 мл, в котором находятся несколько миниатюрных фигурок; весы электронные; ёмкость с неизвестной жидкостью; салфетки для поддержания чистоты.

Важная информация. Масса шприца без фигурок $m_{ш} = 10{,}98$ г (масса вашего шприца может отличаться от указанной, её должны сообщить организаторы). Масса шприца указана с учётом массы самореза. Разбирать шприц и что-либо доставать оттуда в процессе выполнения работы категорически запрещается. По окончании работы шприц с фигурками можно забрать с собой.

1. Понемногу набирайте неизвестную жидкость в шприц. Экспериментально получите зависимость массы шприца от объёма набранной в шприц жидкости (или от полного объёма содержимого под поршнем) (не менее 7 точек). Важно! Не кладите мокрый шприц на весы — жидкость может попасть внутрь прибора и повредить его. Перед взвешиваниями протирайте шприц салфетками насухо!
2. Постройте график полученной зависимости.
3. При помощи построенного графика определите плотность неизвестной жидкости.
4. Определите плотность материала, из которого изготовлены минифигурки.

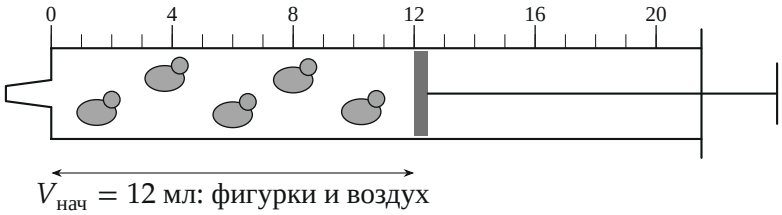

Рис. 1. Поясняющий рисунок: шприц с фигурками, поршень вдвинут до упора — деление $V_{нач} = 12$ мл. Шкала — в миллилитрах.

▲ **Решение. Что происходит.** Весы показывают массу всего шприца: корпус, фигурки и набранная жидкость. Каждый новый миллилитр жидкости добавляет одну и ту же массу $\rho_ж \cdot 1$ мл, поэтому график «масса — объём по шкале» — прямая, и её наклон есть плотность жидкости. Объём фигурок найдём вытеснением: сколько места под поршнем занимают фигурки вместе с известным объёмом жидкости, когда воздуха не осталось.

Обозначения. M — показание весов; V_0 — объём по шкале шприца (положение поршня); V — объём набранной жидкости; $m_ф$, $V_ф$ — масса и объём всех фигурок; $\rho_ж$, $\rho_ф$ — плотности жидкости и материала фигурок. Измерения ниже — данные организаторов.

1. Масса фигурок. Взвешиваем сухой шприц с фигурками: $M_0 = m_ш + m_ф = 16{,}58$ г, откуда

$$m_ф = M_0 - m_ш = 16{,}58 - 10{,}98 = 5{,}60 \text{ г}.$$

2. Способ 1: набираем жидкость в «сухой» шприц. Поршень вдвигаем до упора — он встаёт на деление $V_{нач} = 12$ мл: под поршнем фигурки и воздух между ними (рис. 1). Опускаем носик в жидкость и набираем её порциями по 1 мл, каждый раз протираем шприц и взвешиваем (рис. 2). Набранный объём $V = V_0 - V_{нач}$ (от 0 до 8 мл), его масса $\rho_ж V$, поэтому

$$M = (m_ш + m_ф) + \rho_ж (V_0 - V_{нач}). \qquad (1)$$

Это линейная зависимость $M(V_0)$ с угловым коэффициентом $\rho_ж$.

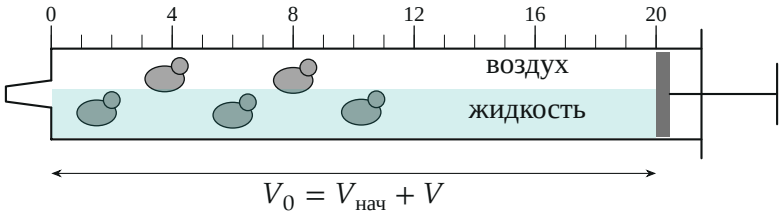

Рис. 2. Набрали жидкость объёмом V: поршень отошёл до деления V_0.

V_0, мл	12	13	14	15	16
M, г	16,58	19,23	20,30	21,34	22,41
V_0, мл	17	18	19	20	
M, г	23,50	24,60	25,64	26,80	

3. График способа 1 (рис. 3). Восемь точек от $V_0 = 13$ мл лежат на одной прямой, а первая порция дала скачок 2,65 г — больше, чем могут весить 1 мл любой обычной жидкости: при первом наборе жидкость заполняет ещё и носик, и часть промежутков, куда шкала не смотрит. Поэтому прямую проводим по восьми точкам (метод наименьших квадратов, python):

$$\rho_ж = \frac{\Delta M}{\Delta V_0} \approx \frac{26{,}80 - 19{,}23}{20 - 13}\ \frac{\text{г}}{\text{мл}} \approx 1{,}08\ \text{г/см}^3.$$

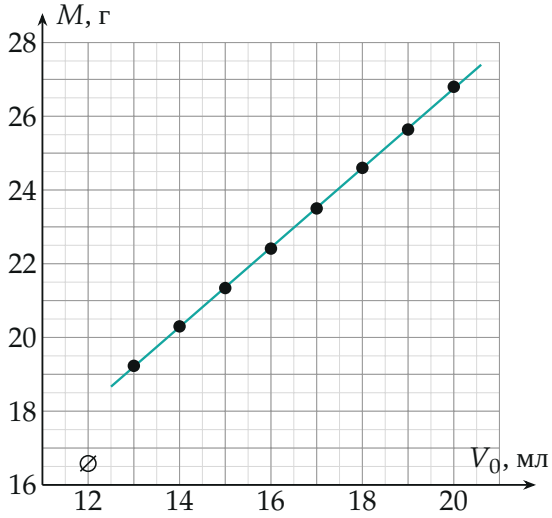

Рис. 3. Способ 1: $M(V_0)$. Перечёркнутая точка — первая, в прямую не входит; наклон прямой 1,08 г/мл.

4. Способ 2: фигурки сразу в жидкости. Набираем жидкость так, чтобы при поршне на $V_{нач} = 12$ мл фигурки были полностью покрыты, а промежутки между ними заполнены. В шприце уже есть жидкость

массой m_0, и

$$M = (m_{ш} + m_{ф} + m_0) + \rho_{ж}\,(V_0 - V_{нач}). \qquad (2)$$

Наклон тот же, сдвинулось только начало прямой.

V_0, мл	12	13	14	15	16
M, г	24,76	26,11	27,12	28,16	29,25
V_0, мл	17	18	19	20	
M, г	30,53	31,47	32,65	33,80	

Здесь скачка нет — воздуха под поршнем нет, и все девять точек ложатся на прямую (рис. 4):

$$\rho_{ж} \approx \frac{33{,}80 - 24{,}76}{20 - 12}\ \frac{\text{г}}{\text{мл}} \approx 1{,}13\ \text{г/см}^3\ \text{(по крайним точкам)},$$

а прямая, проведённая по всем девяти точкам (метод наименьших квадратов), даёт $(1{,}11 \pm 0{,}01)$ г/см^3.

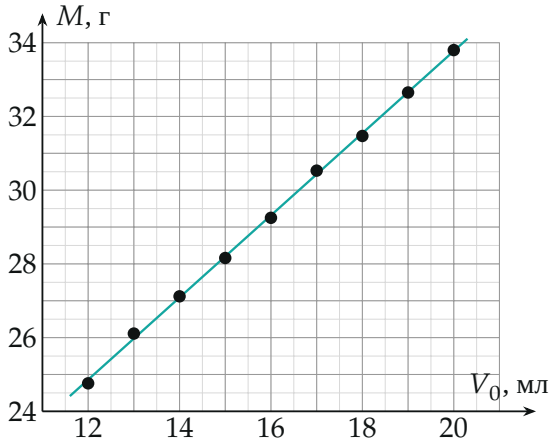

Рис. 4. Способ 2: $M(V_0)$, наклон прямой 1,11 г/мл (по крайним точкам 1,13 г/мл).

Способ 2 надёжнее: в нём нет воздуха, который мог остаться пузырьками. Плотность жидкости $\rho_{ж} = (1{,}12 \pm 0{,}02)$ г/см^3: способ 2 даёт 1,11–

1,13 г/см^3 (по всем точкам и по крайним), что совпадает с настоящей плотностью 1,13 г/см^3 и с ответом организаторов по графикам (1,133 и 1,145 г/см^3). Способ 1 без первой точки даёт заниженное 1,08 г/см^3, а с ней прямая проходит заметно мимо точек; организаторы провели прямую «на глаз» между этими вариантами. Разброс в несколько сотых — это цена деления шприца 1 мл.

5. Объём фигурок. После способа 1 поршень стоит на 20 мл, в шприце $V = 8$ мл жидкости. Переворачиваем шприц носиком вверх и медленно вдвигаем поршень: воздух выходит через носик, пока жидкость не дойдёт до него (рис. 5). Теперь под поршнем только жидкость и фигурки, шкала показывает 12,5 мл. Объём фигурок

$$V_ф = 12{,}5 - V = 12{,}5 - 8 = 4{,}5 \text{ мл}.$$

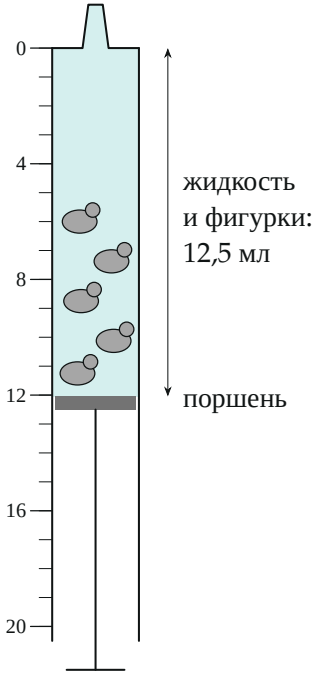

Рис. 5. Шприц носиком вверх: воздух выдавлен, поршень вдвинут до деления 12,5 мл, под ним только фигурки и 8 мл жидкости.

6. Плотность материала фигурок — по определению плотности:

$$\rho_ф = \frac{m_ф}{V_ф} = \frac{5{,}60\ \text{г}}{4{,}5\ \text{см}^3} \approx 1{,}24\ \text{г/см}^3.$$

Обратите внимание. Плотность жидкости даёт наклон прямой, а не отношение M/V_0: в M сидит постоянная масса шприца и фигурок, она лишь поднимает прямую.

Проверка. Размерность: наклон — г/мл = г/см^3. Фигурки в жидкости тонут ($\rho_ф = 1{,}24 > \rho_ж \approx 1{,}12$ г/см^3) — так и было: в способе 2 они лежали на дне под жидкостью. Погрешность: объём читается с точностью $\pm 0{,}5$ мл, это $\pm 11\,\%$ от 4,5 мл, поэтому $\rho_ф = (1{,}24 \pm 0{,}14)$ г/см^3; пузырьки, прилипшие к фигуркам, завышают $V_ф$ и занижают $\rho_ф$.

Ответ. 1), 2) таблицы и графики $M(V_0)$ — прямые (рис. 3, 4); 3) $\rho_ж = (1{,}12 \pm 0{,}02)$ г/см^3 (способ 2; организаторы по графикам — 1,133 и 1,145 г/см^3); 4) $m_ф = 5{,}60$ г, $V_ф = 4{,}5$ см^3, $\rho_ф \approx 1{,}24$ г/см^3.