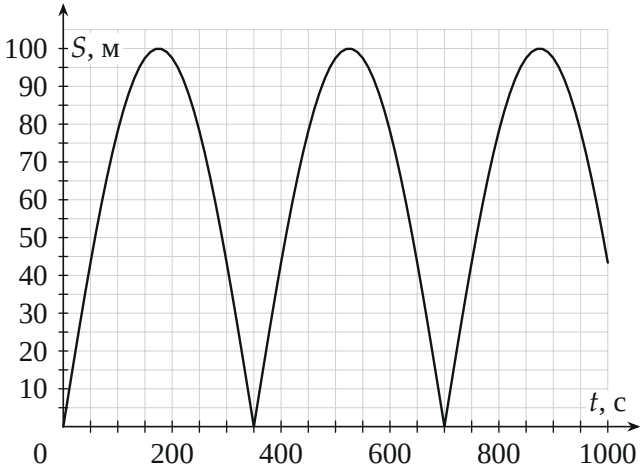
# Тренировка

**Задача 2.** [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 7 класс, задача 2] «Тренировка».

Беговая дорожка стадиона имеет вид окружности. Во время тренировки два спортсмена бежали по ней в одном направлении, каждый со своей постоянной скоростью. Спортсмены использовали маячки, которые передавали их координаты в компьютер тренера. Компьютер рассчитывал расстояние между бегунами, но из-за неправильно настроенного режима работы вычислял расстояние по прямой, а не вдоль беговой дорожки. На графике показана рассчитанная компьютером зависимость расстояния между спортсменами от времени на некотором этапе тренировки. Известно, что спортсмены начали и закончили тренировку одновременно, и за всё время тренировки пробежали дистанции $S_1 = 12$ км и $S_2 = 9$ км 840 м соответственно.




Какие скорости были у спортсменов?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на относительное движение по окружности. Компьютер показывает не путь между бегунами вдоль дорожки, а хорду окружности. Хорда равна нулю, когда бегуны рядом (быстрый догнал медленного), и максимальна — равна диаметру, — когда они на противоположных концах диаметра. Главная идея: между

двумя соседними нулями графика быстрый бегун обгоняет медленного ровно на один круг. Это даёт разность скоростей, а полные дистанции — время тренировки и сами скорости.

**Обозначения.** $d$ — диаметр дорожки, $L = \pi d$ — длина круга, $v_1 > v_2$ — скорости, $T$ — время между соседними встречами, $\tau$ — время тренировки.

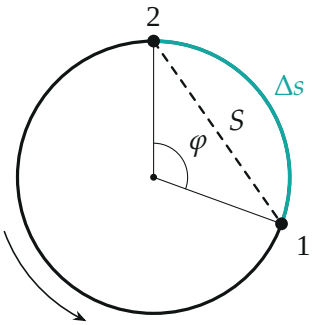



*Рис. 2. Бегун 1 опережает бегуна 2 на дугу $\Delta s$ (бирюза); компьютер показывает хорду $S$ (пунктир). Стрелка — направление бега.*

**1. Диаметр дорожки.** Хорда окружности не бывает длиннее диаметра, и при беге с разными скоростями бегуны рано или поздно оказываются на концах диаметра. Поэтому максимум графика — это диаметр:

$$d = 100 \text{ м}, \qquad L = \pi d \approx 314 \text{ м}.$$

**2. Как связаны хорда и дуга.** Пусть быстрый бегун опережает медленного на дугу $\Delta s$ (рис. 2). Центральный угол $\varphi = 2\pi\,\Delta s/L$, хорда

$$S = d\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Хорда обращается в ноль при $\Delta s = 0,\ L,\ 2L,\ \ldots$ — каждый раз, когда быстрый догоняет медленного, обгоняя его ещё на круг. Из графика (рис. 3) соседние нули — через $T = 350$ с.

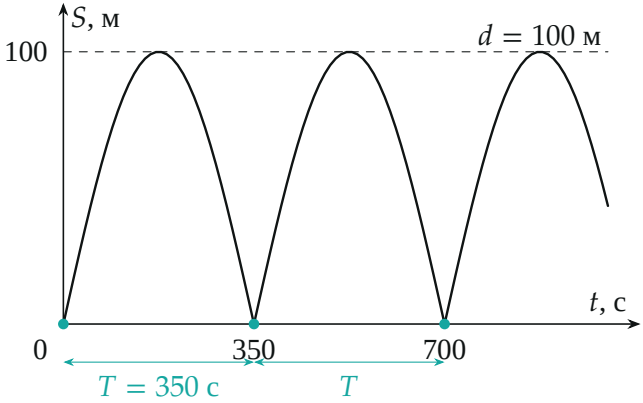



*Рис. 3. Что читаем на графике: максимум — диаметр $d$, расстояние между нулями — время обгона на круг $T$.*

**3. Разность скоростей.** За время $T$ быстрый пробегает на один круг больше медленного:

$$(v_1 - v_2)\,T = L \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_2 = \frac{\pi d}{T} = \frac{314\text{ м}}{350\text{ с}} \approx 0{,}9\text{ м/с}.$$

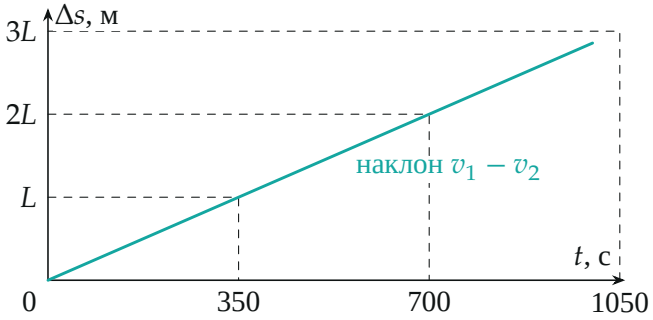



*Рис. 4. Опережение вдоль дорожки $\Delta s = (v_1 - v_2)t$ растёт равномерно; каждый раз, как оно проходит целый круг $L$, хорда (рис. 3) обращается в ноль.*

**4. Время тренировки.** Тренировка началась и кончилась одновременно, за всё время $\tau$ быстрый пробежал на $S_1 - S_2 = 12000 - 9840 = 2160$ м больше:

$$(v_1 - v_2)\,\tau = S_1 - S_2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{(S_1 - S_2)\,T}{\pi d},$$

$$\tau = \frac{2160 \cdot 350}{314}\ \text{с} \approx 2{,}4 \cdot 10^3\ \text{с} = 40\ \text{мин}.$$

**5. Скорости.**

$$v_1 = \frac{S_1}{\tau} = \frac{12000\ \text{м}}{2400\ \text{с}} = 5{,}0\ \text{м/с}, \qquad v_2 = \frac{S_2}{\tau} = \frac{9840\ \text{м}}{2400\ \text{с}} = 4{,}1\ \text{м/с}.$$

Без округления $\tau = 2406$ с, $v_1 = 4{,}99$ м/с, $v_2 = 4{,}09$ м/с — те же значения с точностью до десятых.

**Обратите внимание.** Нули графика — это не «бегуны пробежали круг», а «быстрый обогнал медленного на круг»: период графика задаёт только *разность* скоростей. Сами скорости даёт лишь вторая часть условия — дистанции за одно и то же время тренировки.

**Соберём ответ.** $v_1 = \dfrac{S_1 \pi d}{(S_1 - S_2)T} \approx 5{,}0$ м/с, $v_2 = \dfrac{S_2 \pi d}{(S_1 - S_2)T} \approx 4{,}1$ м/с.

**Проверка.** Разность $5{,}0 - 4{,}1 = 0{,}9$ м/с совпадает с шагом 3. Хорда в конце графика: $t = 1000$ с, $\Delta s = 0{,}8976 \cdot 1000 = 898$ м, $\varphi/2 = \pi \cdot 898/314 \approx 8{,}98$ рад, $S = 100\,|\sin 8{,}98| \approx 43$ м — как на графике.

**Ответ.** $v_1 \approx 5{,}0$ м/с, $v_2 \approx 4{,}1$ м/с.