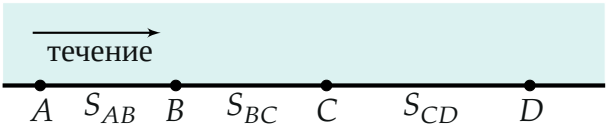
Четыре пристани

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 7 класс, задача 3] «Четыре пристани».

Четыре населённых пункта A, B, C и D располагаются на берегу одной реки, как показано на рисунке, причём S_{AB} равно S_{BC}.



От пристани B одновременно отправляются моторная лодка к пристани A и катер — к пристани D. Скорости моторной лодки и катера относительно воды постоянны и равны v и $2v$ соответственно. Моторная лодка прибывает в A спустя время τ, сразу же разворачивается и без остановок плывёт в D. Ещё через время τ лодка встречает точно у пристани C катер, который, доплыв до D, тоже сразу развернулся и так же без остановок отправился в A.

1. Найдите скорость течения реки u.
2. Найдите расстояния S_{AB} и S_{CD}.
3. Спустя какое время T после своей встречи катер и лодка снова встретятся, если в конечных пунктах своих маршрутов опять не задерживаясь развернутся и отправятся навстречу друг другу?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на сложение скоростей: скорость относительно берега равна скорости относительно воды плюс скорость течения. Течение направлено от A к D, поэтому лодка и катер идут по течению со скоростями $v+u$ и $2v+u$, против — $v-u$ и $2v-u$. Главная идея второго пункта: в системе отсчёта воды лодка за время 2τ проплыла туда и обратно поровну и вернулась к той «точке воды», от которой стартовала; катер стартовал от той же точки воды в тот же момент и встретил лодку в момент 2τ — значит, и он вернулся к ней, т. е. плыл по течению и против него тоже по τ.

Обозначения. Ось x вдоль берега от A к D (по течению), $S = S_{AB} = S_{BC}$; время отсчитываем от отплытия из B.

Пункт 1. 1. Лодка: туда и обратно. Против течения лодка проходит S_{AB} за τ, по течению $S_{AC} = 2S$ — тоже за τ:

$$S = (v - u)\,\tau, \qquad 2S = (v + u)\,\tau.$$

Делим второе на первое — неизвестные S и τ уходят:

$$\frac{v+u}{v-u} = 2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{v}{3}.$$

Пункт 2. 2. Расстояние S_{AB}. Из первого уравнения: $S_{AB} = (v-u)\tau = \frac{2}{3}v\tau$.

3. Катер в системе отсчёта воды. В системе отсчёта воды скорости лодки и катера по модулю постоянны: v и $2v$. Лодка плыла в ней τ в одну сторону и τ в другую с одной и той же скоростью — и к моменту 2τ вернулась к той точке воды, где была в начале (рис. 3). Катер стартовал из той же точки и в момент 2τ встретил лодку, т. е. тоже оказался в ней. Значит, и катер двигался по течению и против течения по τ:

$$S_{BD} = S + S_{CD} = (2v + u)\,\tau, \qquad S_{CD} = (2v - u)\,\tau.$$

Из второго: $S_{CD} = \frac{5}{3}v\tau$. Проверка первым: $\frac{2}{3}v\tau + \frac{5}{3}v\tau = \frac{7}{3}v\tau = (2v + \frac{v}{3})\tau$ — верно.

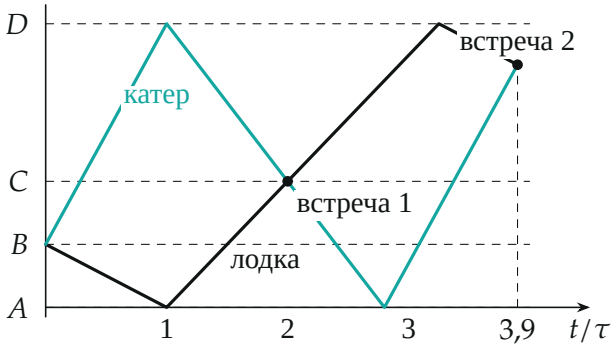


Рис. 2. Графики $x(t)$ в системе отсчёта берега, единица длины — $v\tau$: $A = 0$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{4}{3}$, $D = 3$. Чёрный — лодка, бирюзовый — катер. Наклоны: лодка $\mp\frac{2}{3}v$ и $\frac{4}{3}v$, катер $\frac{7}{3}v$ и $-\frac{5}{3}v$.

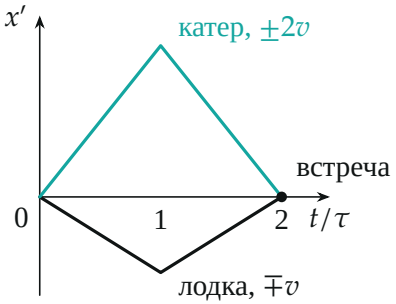


Рис. 3. Те же движения в системе отсчёта воды (x' — координата относительно воды, единица $v\tau$): лодка с постоянной по модулю скоростью v возвращается в исходную точку за 2τ; встреча там же — значит, и катер плыл в каждую сторону по τ.

Пункт 3. 4. После первой встречи. В момент 2τ оба у пристани C. Лодка идёт по течению к D:

$$t_1 = \frac{S_{CD}}{v+u} = \frac{5v\tau/3}{4v/3} = \frac{5}{4}\tau.$$

Катер идёт против течения к A (путь $S_{CA} = 2S$):

$$t_2 = \frac{2S}{2v-u} = \frac{4v\tau/3}{5v/3} = \frac{4}{5}\tau.$$

Катер развернулся раньше лодки на $t_1 - t_2 = \frac{9}{20}\tau$ и за это время ушёл от A вниз по течению на

$$S_к = (2v+u)\,\frac{9}{20}\tau = \frac{7}{3}v \cdot \frac{9}{20}\tau = \frac{21}{20}v\tau.$$

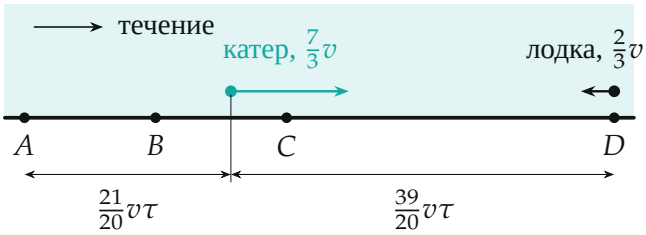


Рис. 4. Момент разворота лодки у D ($\frac{5}{4}\tau$ после первой встречи): катер уже идёт вниз по течению. Стрелки скоростей относительно берега — по модулю ($\frac{7}{3}v$ и $\frac{2}{3}v$).

5. Сближение. В момент разворота лодки (рис. 4) расстояние между ними

$$S_{AD} - S_{\text{к}} = \Big(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\Big)v\tau - \frac{21}{20}v\tau = 3v\tau - \frac{21}{20}v\tau = \frac{39}{20}\,v\tau.$$

Они идут навстречу: лодка против течения ($v - u$), катер по течению ($2v + u$); скорость сближения $(v-u)+(2v+u) = 3v$ — течение выпало, как и должно быть для встречного движения. Время до встречи

$$t_3 = \frac{39v\tau/20}{3v} = \frac{13}{20}\,\tau, \qquad T = t_1 + t_3 = \frac{5}{4}\tau + \frac{13}{20}\tau = \frac{19}{10}\,\tau = 1{,}9\,\tau.$$

Место второй встречи: $\frac{21}{20}v\tau + \frac{7}{3}v\cdot\frac{13}{20}\tau = \frac{77}{30}v\tau \approx 2{,}57\,v\tau$ от A — между C и D, внутри маршрута.

Обратите внимание. Удобнее всего пункт 2 решается в системе отсчёта воды: в ней течения нет, и «туда и обратно поровну по времени» означает «вернулся в ту же точку». Для катера это заранее не очевидно — это следствие встречи с лодкой.

Соберём ответ. $u = \frac{v}{3}$; $S_{AB} = \frac{2}{3}v\tau$, $S_{CD} = \frac{5}{3}v\tau$; $T = \frac{19}{10}\tau = 1{,}9\,\tau$.

Проверка. Катер: путь $B \to D$ за $\frac{7v\tau/3}{7v/3} = \tau$, обратно $D \to C$ за $\frac{5v\tau/3}{5v/3} = \tau$ — ровно в 2τ у C, вместе с лодкой. Второй способ для T в системе отсчёта воды: после разворота лодки оба движутся навстречу со скоростями v и $2v$ относительно воды, сближение $3v$ — то же уравнение шага 5.

Ответ. 1) $u = \frac{v}{3}$; 2) $S_{AB} = \frac{2}{3}v\tau$, $S_{CD} = \frac{5}{3}v\tau$; 3) $T = 1{,}9\,\tau$.