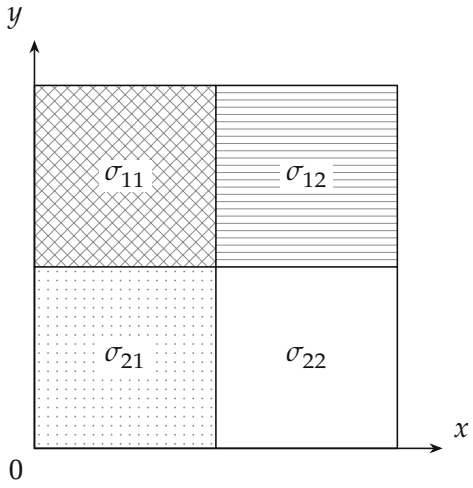
Пластинка

Задача 4. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 7 класс, задача 4] «Пластинка».

Пластина состоит из четырёх квадратов одинаковой толщины со стороной $a = 1$ м каждый, сделанных из разных материалов. Квадраты однородны, а их поверхностные плотности различны:

- левый верхний квадрат: $\sigma_{11} = 400$ г/м^2;
- правый верхний квадрат: $\sigma_{12} = 240$ г/м^2;
- левый нижний квадрат: $\sigma_{21} = 200$ г/м^2;
- правый нижний квадрат: $\sigma_{22} = 120$ г/м^2.

С пластиной связали систему координат Oxy так, что начало отсчёта совпадает с нижним левым углом пластинки (см. рис.). Затем пластину разрезали по двум перпендикулярным прямым, параллельным осям координат, на четыре части **равной массы**.



1. В каком из четырёх квадратов находится точка пересечения линий, по которым разрезали пластину? Обоснуйте свой ответ.
2. Определите координаты точки пересечения линий, по которым разрезали пластину.
3. Чему равны средние поверхностные плотности каждой из четырёх получившихся частей?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на поверхностную плотность: масса однородного куска равна $\sigma\cdot$площадь. Вертикальный разрез делит пластину на левую и правую половины по массе (в каждой — по две части), горизонтальный — на верхнюю и нижнюю. Главная идея: сравнить массу левого столбца квадратов и верхней строки с половиной массы пластины — так станет ясно, через какие квадраты проходят разрезы.

Обозначения. $(x;\,y)$ — точка пересечения разрезов; $m_{11},\dots,m_{22}$ — массы квадратов; m — масса каждой из четырёх частей.

1. Массы квадратов. Масса однородного квадрата $m=\sigma a^2$:

$$m_{11}=400\text{ г},\quad m_{12}=240\text{ г},\quad m_{21}=200\text{ г},\quad m_{22}=120\text{ г}.$$

Масса пластины $m_0=960$ г, каждой части $m=m_0/4=240$ г, двух частей $2m=480$ г.

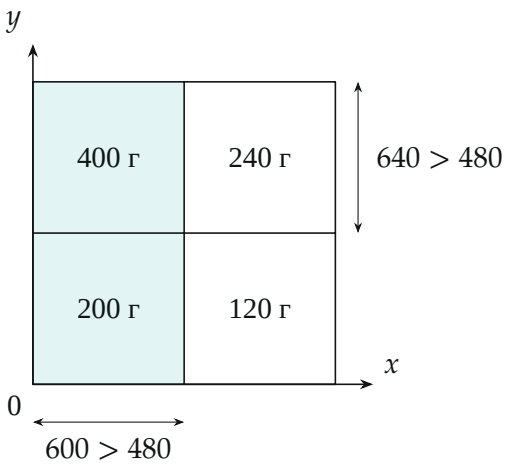


Рис. 2. Массы квадратов. Левый столбец (бирюза) и верхняя строка тяжелее половины пластины, $2m=480$ г.

2. Через какие квадраты идут разрезы. Слева от вертикального разреза — две части, 480 г. Левый столбец весит $400+200=600$ г >480 г, значит, вертикальный разрез проходит левее $x=a$, через левые квадраты. Сверху от горизонтального разреза — тоже 480 г, а верхняя строка

весит $400 + 240 = 640$ г > 480 г, значит, горизонтальный разрез проходит выше $y = a$, через верхние квадраты. Обе прямые пересекаются в квадрате, который и левый, и верхний, — в квадрате σ_{11}.

3. Вертикальный разрез. Левее прямой x лежат полоски шириной x из квадратов σ_{11} и σ_{21} (высотой a каждая):

$$(\sigma_{11} + \sigma_{21})\, a\, x = 2m \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2m}{a(\sigma_{11} + \sigma_{21})} = \frac{480}{600}\ \text{м} = 0{,}8\ \text{м}.$$

4. Горизонтальный разрез. Выше прямой y лежат полоски высотой $2a - y$ из квадратов σ_{11} и σ_{12}:

$$(\sigma_{11} + \sigma_{12})\, a\, (2a - y) = 2m \quad \Rightarrow \quad 2a - y = \frac{480}{640}\ \text{м} = 0{,}75\ \text{м},$$

откуда $y = 1{,}25$ м.

5. Проверка, что все четыре части равны. Условия шагов 3 и 4 — два уравнения, а частей четыре; проверим левую верхнюю часть: $\sigma_{11} \cdot x \cdot (2a - y) = 400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 240$ г $= m$. Тогда и остальные по 240 г: правая верхняя $= 480 - 240$, левая нижняя $= 480 - 240$, правая нижняя $= 960 - 3 \cdot 240$. Разрезать на четыре равные части действительно можно.

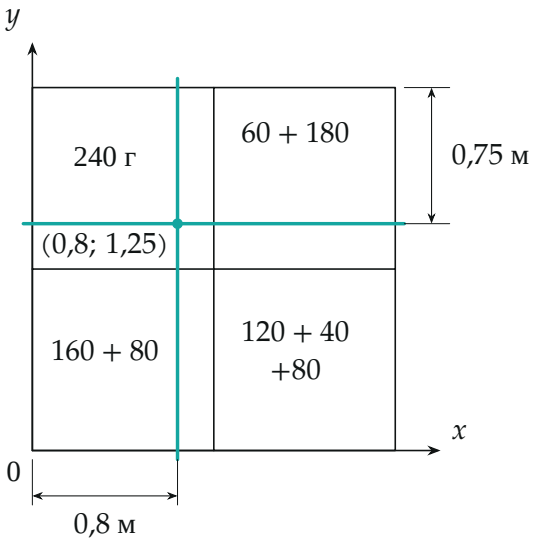


Рис. 3. Разрезы (бирюза) и массы кусков, из которых состоит каждая часть, в граммах: каждая часть — 240 г.

6. Средние поверхностные плотности частей. Средняя поверхностная плотность части — её масса, делённая на площадь:

$$\sigma' = \frac{m}{S_{\text{части}}}.$$

$$\text{левая верхняя: } \frac{240}{0{,}8 \cdot 0{,}75} = 400 \text{ г/м}^2,$$

$$\text{правая верхняя: } \frac{240}{1{,}2 \cdot 0{,}75} \approx 267 \text{ г/м}^2,$$

$$\text{левая нижняя: } \frac{240}{0{,}8 \cdot 1{,}25} = 240 \text{ г/м}^2,$$

$$\text{правая нижняя: } \frac{240}{1{,}2 \cdot 1{,}25} = 160 \text{ г/м}^2.$$

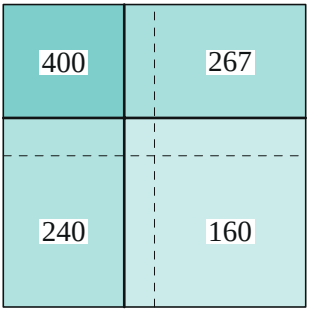


Рис. 4. Средние поверхностные плотности частей, г/м^2 (чем темнее, тем плотнее); пунктир — границы исходных квадратов.

Обратите внимание. Левая верхняя часть целиком из материала σ_{11}, поэтому её средняя плотность просто равна $\sigma_{11} = 400$ г/м^2; у остальных частей материал смешанный, и средняя плотность лежит между плотностями входящих в часть квадратов.

Соберём ответ. Точка пересечения — в левом верхнем квадрате (σ_{11}); $x = \dfrac{2m}{a(\sigma_{11} + \sigma_{21})} = 0{,}8$ м, $y = 2a - \dfrac{2m}{a(\sigma_{11} + \sigma_{12})} = 1{,}25$ м; средние плотности 400, ≈ 267, 240, 160 г/м^2.

Проверка. Площади частей $0{,}6+0{,}9+1{,}0+1{,}5 = 4\,\text{м}^2$ — вся пластина. Масса $240 \cdot 4 = 960$ г — как в шаге 1. Правая верхняя: $(400 \cdot 0{,}2 + 240 \cdot 1) \cdot 0{,}75 = 240$ г; плотность 267 лежит между 240 и 400, как и должно быть.

Ответ. 1) в левом верхнем квадрате (σ_{11}); 2) $x = 0{,}8$ м, $y = 1{,}25$ м; 3) левая верхняя часть 400 г/м^2, правая верхняя ≈ 267 г/м^2, левая нижняя 240 г/м^2, правая нижняя 160 г/м^2.