Конус

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 8 класс, практический тур, задача 2] «Конус».

Оборудование: обрезанный конус со шпажкой, на котором нанесены пометки с шагом 1 см, весы электронные, пластиковый прозрачный стаканчик объёмом 200 мл, две линейки 30 см, штатив с лапкой, шприц 20 мл, трубка, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте, сосуд с водой, лист миллиметровой бумаги для построения графика(ов). Объём полного (необрезанного) конуса определяется по формуле

$$V = kL_0^3,$$

где k — постоянный для данного конуса коэффициент, L_0 — длина образующей конуса (см. рис. 1). Используя выданное оборудование, Вам необходимо определить:

1. величину длины образующей полного (необрезанного) конуса L_0;
2. значение коэффициента k;
3. массу полного конуса M.

При выполнении работы необходимо придерживаться следующих обозначений:

- m — масса выданного обрезанного конуса;
- l — длина образующей обрезанного конуса.

Примечания. Масса шпажки составляет 1,45 г, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. Образующей полного (необрезанного) конуса называется отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой на окружности его основания. Вынимать шпажку из конуса запрещено.

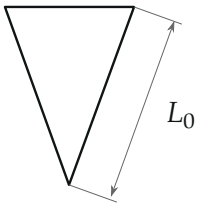

Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** Это экспериментальная задача на гидростатическое взвешивание. Объём погружённой части конуса измеряем по силе Архимеда: конус держит штатив, а вода давит на него вверх, и по третьему закону Ньютона конус давит на воду (а через неё — на весы) вниз с той же силой. Погружённая часть обрезанного конуса — это разность двух подобных полных конусов, поэтому её объём $k((l_0+l_x)^3-l_0^3)$, и показания весов линейны по $(l_0+l_x)^3$ — наклон прямой даёт k. Длину недостающей вершины l_0 находим, продолжив образующие линейками.

Обозначения. l_0 — длина образующей отрезанной вершины, $l = 15$ см — длина образующей обрезанного конуса, $L_0 = l + l_0$; l_x — длина образующей под водой (по меткам на конусе); $M_\text{В}$ — показания весов после обнуления со стаканчиком воды.

1. Длина образующей полного конуса. Прикладываем две линейки вдоль противоположных образующих (рис. 2): их рёбра сходятся в точке, где была вершина. Расстояние от этой точки до края малого основания вдоль линейки $l_0 = 5{,}8$ см. Тогда

$$L_0 = l + l_0 = 15 + 5{,}8 = 20{,}8 \text{ см}.$$

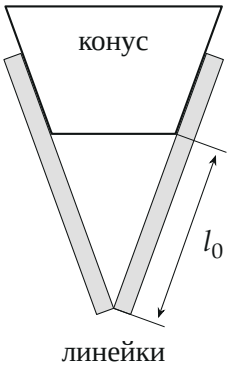

Рис. 2. Две линейки вдоль образующих сходятся в бывшей вершине конуса; l_0 — длина недостающей части образующей.

2. Установка для гидростатического взвешивания. Стаканчик с водой ставим на весы, конус малым основанием вниз опускаем в воду, шпажку зажимаем в лапке штатива так, чтобы конус не касался стенок и

дна (рис. 3). Сначала поднимаем конус из воды и обнуляем весы со стаканчиком воды, затем опускаем конус и записываем показания, когда уровень воды доходит до очередной метки l_x. Если воды мало или много — добавляем или отбираем шприцем, пока конус не уходит в воду на максимальную глубину без перелива.

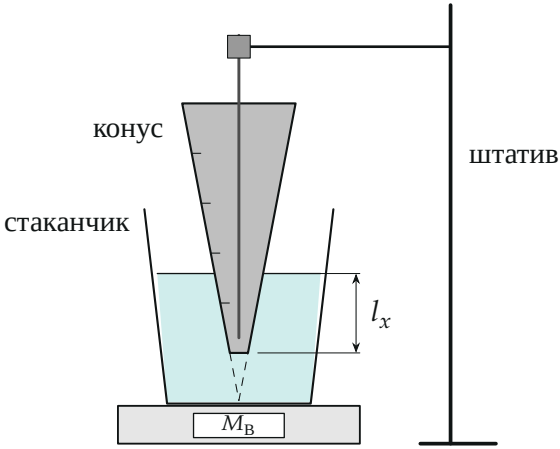

Рис. 3. Гидростатическое взвешивание: конус на шпажке висит в лапке штатива и не касается стаканчика; весы показывают силу Архимеда в граммах. Пунктир — отрезанная вершина.

3. Что показывают весы. Условие равновесия стаканчика с водой: на весы давит вес воды и сила $F_\text{А}$, с которой конус по третьему закону Ньютона давит на воду (вода давит на конус вверх с силой Архимеда). Вес воды убран обнулением, поэтому $M_\text{В}g = F_\text{А} = \rho g V_\text{погр}$. Погружённая часть — полный конус с образующей $l_0 + l_x$ без вершины с образующей l_0; конусы подобны, поэтому объёмы обоих выражаются той же формулой $V = kL^3$:

$$M_\text{В} = \rho k((l_0 + l_x)^3 - l_0^3) = \rho k\,(l_0 + l_x)^3 - \rho k l_0^3.$$

В координатах $((l_0 + l_x)^3;\, M_\text{В})$ это прямая с угловым коэффициентом ρk.

4. Измерения (данные организаторов, $l_0 = 5{,}8$ см):

l_x, см	1	2	3	4	5
$M_\text{В}$, г	2,85	8,43	16,55	23,82	35,29
$(l_0 + l_x)^3$, см^3	314	475	681	941	1260

l_x, см	6	7	8	9
$M_\text{В}$, г	49,41	66,90	83,21	103,51
$(l_0 + l_x)^3$, см^3	1643	2097	2628	3242

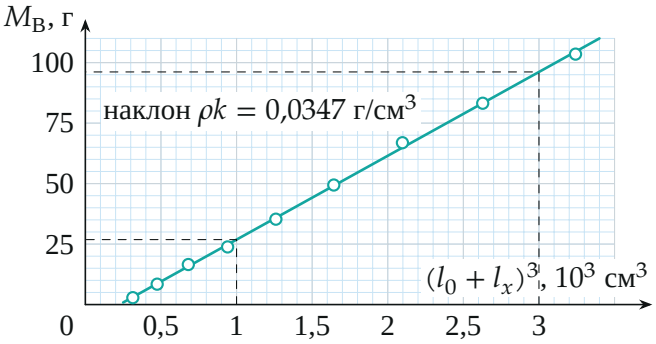

Рис. 4. Показания весов от $(l_0 + l_x)^3$: точки опыта и прямая по методу наименьших квадратов. Пунктир — две далёкие точки прямой, по которым считаем наклон.

5. Коэффициент k. Точки ложатся на прямую (рис. 4). Метод наименьших квадратов (python) даёт наклон $\rho k = (0{,}0347 \pm 0{,}0004)$ г/см^3; по двум далёким точкам прямой (1000; 26,85) и (3000; 96,15):

$$\rho k = \frac{96{,}15 - 26{,}85}{3000 - 1000}\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 0{,}0347\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{0{,}0347}{\rho} \approx 0{,}035.$$

Проверка установки: по шагу 3 прямая пересекает ось $M_\text{В}$ в точке $-\rho k l_0^3$. Из МНК свободный член $-7{,}8$ г, откуда $l_0 = \sqrt[3]{7{,}8/0{,}0347} \approx 6{,}1$ см — близко к измеренным линейками 5,8 см.

6. Масса полного конуса. Взвешиваем конус со шпажкой: $m_{\text{к+ш}} = 6{,}73$ г, без шпажки $m = 6{,}73 - 1{,}45 = 5{,}28$ г. Материал конуса однороден

(конус сплошной), поэтому масса пропорциональна объёму, а объёмы подобных конусов — кубам образующих. Обрезанный конус — полный без вершины:

$$\frac{M}{m} = \frac{kL_0^3}{kL_0^3 - kl_0^3} \quad \Rightarrow \quad M = m\,\frac{L_0^3}{L_0^3 - l_0^3} = 5{,}28 \cdot \frac{20{,}8^3}{20{,}8^3 - 5{,}8^3} \approx 5{,}4 \text{ г}.$$

Объём полного конуса $V = kL_0^3 = 0{,}0347 \cdot 20{,}8^3 \approx 3{,}1 \cdot 10^2$ см^3; плотность материала $M/V \approx 0{,}017$ г/см^3 — это пенопласт.

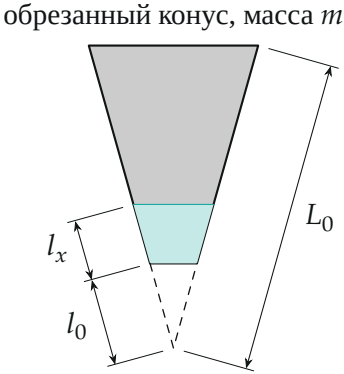

Рис. 5. Геометрия: полный конус с образующей L_0, отрезанная вершина l_0 (пунктир), погружённая часть l_x (бирюза) — разность конусов с образующими $l_0 + l_x$ и l_0.

7. Погрешность. Наклон по МНК известен с точностью около 1 %, отсчёт уровня по меткам и l_0 ($\pm 0{,}2$ см) дают ещё несколько процентов: $k = 0{,}035 \pm 0{,}002$. В массу M ошибка l_0 почти не входит: при $l_0 = 5{,}6$ и 6,0 см получаем 5,39 и 5,41 г.

Обратите внимание. Весы показывают не вес конуса (его держит штатив), а силу, с которой вода давит на дно из-за погружённого конуса, — по третьему закону Ньютона она равна силе Архимеда. Поэтому весы обнуляем со стаканчиком воды, но без конуса в воде.

Соберём ответ. $L_0 = l + l_0 \approx 20{,}8$ см; $k = \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\Delta M_\text{в}}{\Delta(l_0 + l_x)^3} \approx 0{,}035$; $M = m\dfrac{L_0^3}{L_0^3 - l_0^3} \approx 5{,}4$ г.

Проверка. k безразмерный: г/см^3 делим на г/см^3. Для конуса с образующей L и половиной угла при вершине α: $V = \frac{\pi}{3} L^3 \sin^2\alpha \cos\alpha$; $k = 0{,}035$ даёт $\alpha \approx 11°$ и радиус основания $L_0 \sin\alpha \approx 3{,}8$ см — узкий конус, как раз помещается в стаканчик на 200 мл. Предел $l_0 \to 0$ (конус не обрезан) даёт $M = m$.

Ответ. 1) $L_0 = l + l_0 \approx 20{,}8$ см; 2) $k \approx 0{,}035$; 3) $M \approx 5{,}4$ г.