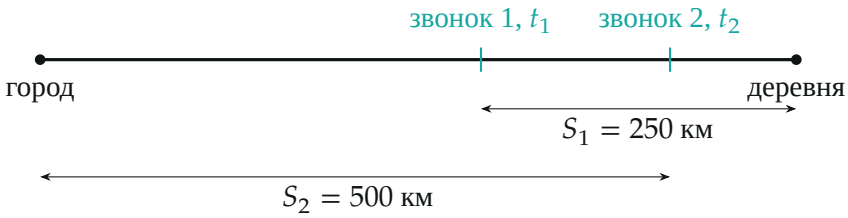
Из города в деревню

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 8 класс, задача 1] «Из города в деревню».

Экспериментатор Баг ехал из города в деревню на автомобиле $t = 10$ ч. Его путь состоял из трёх участков, на которых он двигался с постоянными скоростями. Первую часть пути он ехал со скоростью, равной средней скорости на всём пути. На втором и третьем участках скорости отличались в 2 раза. Также Баг совершенно точно помнил, что за время пути он дважды (кратковременно) разговаривал по телефону с теоретиком Глюком, причём эти звонки совершенно точно были на разных участках пути и не в момент изменения скорости. В первый раз Глюк позвонил ему через $t_1 = 6{,}5$ ч после выезда из города, когда до деревни оставалось ехать $S_1 = 250$ км, а во второй — через $t_2 = 9$ ч, когда он отъехал от города на $S_2 = 500$ км. Экспериментатор посчитал среднюю скорость на отрезке между двумя звонками Глюка, и оказалось, что она равна скорости на первом участке! Используя данные из условия, определите:

1. Расстояние s, которое проехал Баг между звонками.
2. Скорости движения Бага v_1, v_2 и v_3 на первом, втором и третьем участках соответственно.
3. Протяжённости l_1, l_2 и l_3 в километрах первого, второго и третьего участков соответственно.



Поясняющий рисунок: дорога из города в деревню и места двух звонков.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение по участкам и среднюю скорость; удобнее всего думать о ней через график пути $x(t)$: на каждом участке он — отрезок прямой, наклон которого

равен скорости, а средняя скорость между двумя моментами — наклон хорды. Главная идея: скорость первого участка равна средней на всём пути, т. е. L/t, а средняя скорость между звонками выражается через ту же неизвестную длину пути L — приравняв их, найдём L. Дальше по координатам звонков определим, на каких участках они были.

Обозначения. $x(t)$ — путь от города к моменту t; L — длина всего пути; T_1, T_2 — моменты смены скорости (конец первого и второго участков).

1. Длина пути и расстояние между звонками. В момент первого звонка Баг проехал $x(t_1) = L - S_1$, в момент второго — $x(t_2) = S_2$. Между звонками он проехал

$$s = S_2 - (L - S_1) = 750\text{ км} - L.$$

Средняя скорость на всём пути и равная ей скорость первого участка: $v_1 = L/t$. По условию средняя скорость между звонками равна v_1:

$$\frac{s}{t_2 - t_1} = \frac{L}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{750 - L}{2{,}5} = \frac{L}{10} \quad \Rightarrow \quad L = 600\text{ км}.$$

Отсюда $s = 750 - 600 = 150$ км, $v_1 = 600/10 = 60$ км/ч. На графике $x(t)$ (рис. 2) это значит, что хорда между точками звонков $P_1(6{,}5;\ 350)$ и $P_2(9;\ 500)$ параллельна прямой $x = 60t$ первого участка.

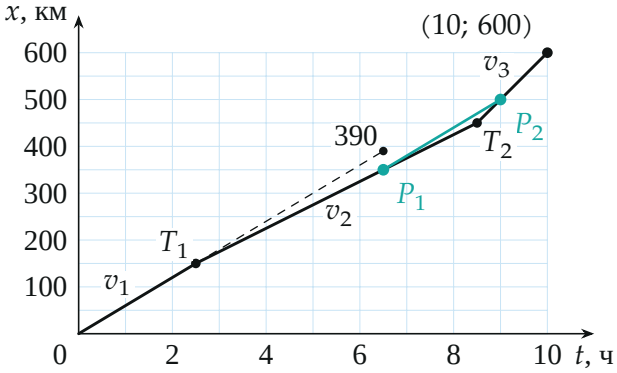


Рис. 2. График пути $x(t)$. Бирюзовая хорда P_1P_2 параллельна первому участку (наклон 60 км/ч). Пунктир — продолжение первого участка: в момент t_1

он дал бы 390 км, а не 350 км.

2. На каких участках были звонки. Звонки на разных участках, и второй позже первого, поэтому возможны пары участков $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$. Если бы первый звонок был на первом участке, к моменту t_1 Баг проехал бы $v_1 t_1 = 60 \cdot 6{,}5 = 390$ км, а он проехал 350 км (пунктир на рис. 2 проходит выше P_1). Значит, первый звонок — на втором участке, второй — на третьем.

3. Скорости. Третий участок — последний, и в момент t_2 Баг уже на нём, поэтому весь последний час он ехал со скоростью v_3:

$$v_3 = \frac{L - S_2}{t - t_2} = \frac{100\text{ км}}{1\text{ ч}} = 100\text{ км/ч}.$$

По условию $v_2 = v_3/2 = 50$ км/ч или $v_2 = 2v_3 = 200$ км/ч. Выбрать помогает первая фраза условия: первый участок пройден со средней скоростью 60 км/ч, значит, и на втором и третьем вместе средняя скорость тоже 60 км/ч. Если обе скорости больше 60 км/ч (200 и 100), средняя на них не может быть 60 км/ч. Остаётся

$$v_2 = \frac{v_3}{2} = 50\text{ км/ч}.$$

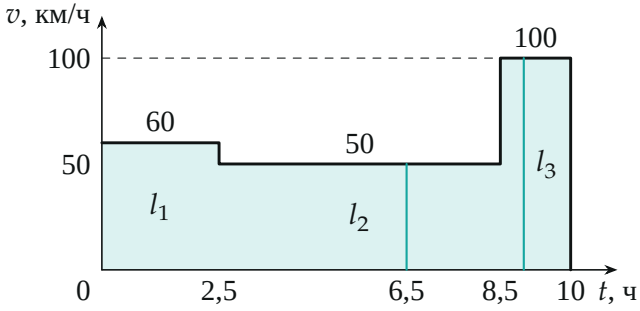


Рис. 3. Скорость $v(t)$. Площадь под графиком на каждом участке — его длина; бирюзовые отрезки — моменты звонков 6,5 ч и 9 ч.

4. Длины участков. Неизвестным осталось время T_1 окончания первого участка. За время t_1 Баг проехал T_1 часов со скоростью v_1 и $(t_1 - T_1)$

— со скоростью v_2:

$$v_1T_1 + v_2(t_1 - T_1) = L - S_1,$$

$$T_1 = \frac{L - S_1 - v_2t_1}{v_1 - v_2} = \frac{350 - 325}{10} = 2{,}5 \text{ ч},$$

$l_1 = v_1T_1 = 150$ км. Третий участок кончается в деревне в момент t; от момента t_2 до конца пройдено 100 км, а весь третий участок длится $t - T_2$. Время T_2 найдём из того, что в момент t_2 путь равен S_2:

$$l_1 + v_2(T_2 - T_1) + v_3(t_2 - T_2) = S_2,$$

$$150 + 50(T_2 - 2{,}5) + 100(9 - T_2) = 500,$$

откуда $T_2 = 8{,}5$ ч. Тогда

$$l_2 = v_2(T_2 - T_1) = 50 \cdot 6 = 300 \text{ км}, \quad l_3 = v_3(t - T_2) = 100 \cdot 1{,}5 = 150 \text{ км}.$$

Звонки действительно не в моменты смены скорости: $2{,}5 < 6{,}5 < 8{,}5 < 9 < 10$.

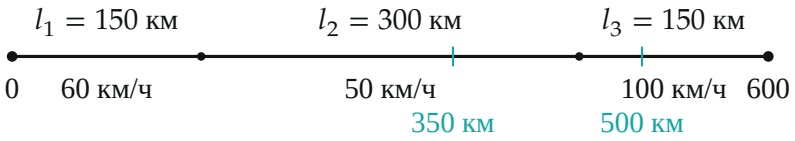


Рис. 4. Итог: участки дороги, их длины и скорости; бирюзовые засечки — места звонков.

Обратите внимание. Длину пути L нельзя взять «сразу из условия»: в данных есть путь, пройденный ко второму звонку, и остаток пути при первом звонке, но это разные моменты. L получается только из равенства средней скорости между звонками и скорости первого участка.

Соберём ответ. $L = 600$ км, $s = 150$ км; $v_1 = 60$ км/ч, $v_2 = 50$ км/ч, $v_3 = 100$ км/ч; $l_1 = 150$ км, $l_2 = 300$ км, $l_3 = 150$ км.

Проверка. Сумма участков $150 + 300 + 150 = 600$ км $= L$; время $2{,}5 + 6 + 1{,}5 = 10$ ч $= t$. Путь к первому звонку $150 + 50 \cdot 4 = 350$ км, ко второму

$450 + 100 \cdot 0{,}5 = 500$ км — оба данных условия выполнены. Средняя скорость на втором и третьем участках вместе $450/7{,}5 = 60$ км/ч, как и должно быть.

Ответ. 1) $s = 150$ км; 2) $v_1 = 60$ км/ч, $v_2 = 50$ км/ч, $v_3 = 100$ км/ч; 3) $l_1 = 150$ км, $l_2 = 300$ км, $l_3 = 150$ км.