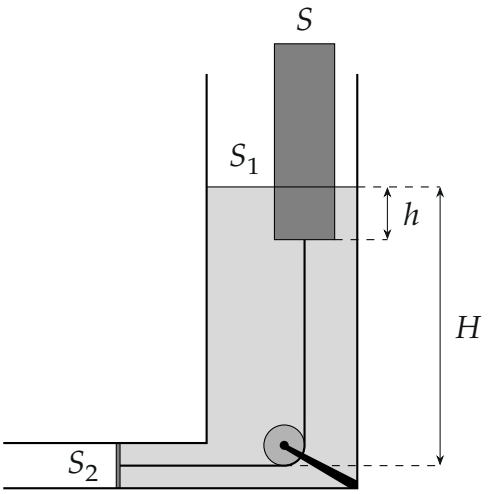
Сосуд с трубой

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 8 класс, задача 2] «Сосуд с трубой».

К цилиндрическому сосуду с вертикальными стенками, площадь дна которого равна S_1, сбоку прикреплена горизонтальная трубка круглого сечения (см. рис.). По трубке без трения может скользить поршень, который при помощи нити, перекинутой через маленький неподвижный блок, связан с поплавком. Участок нити от поплавка до блока вертикален, а от блока до поршня — горизонтален. Если в этот сосуд медленно налить однородную жидкость плотностью ρ, то система окажется в равновесии в тот момент, когда поплавок будет погружён в жидкость на глубину h, а расстояние от центральной оси поршня до поверхности жидкости будет равно H. Площадь поперечного сечения поплавка S, причём $S > S_2$. Трубка открыта в атмосферу, поршень за пределы трубки не выходит. Массы нити, поршня и блока пренебрежимо малы, нить нерастяжима, трение в блоке отсутствует. Ускорение свободного падения равно g.



1. Чему равна масса поплавка?
2. На поплавок медленно положили тело массой Δm, в результате чего поршень сместился и занял новое положение равновесия. На какое расстояние и в какую сторону переместился поршень?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тел в жидкости: поплавок и поршень связаны одной нитью, поэтому натяжение нити одно и то же для обоих. Поршень держится равновесием «давление жидкости наружу — нить внутрь», поплавок — «архимедова сила вверх — вес и нить вниз» (блок у дна, нить тянет поплавок вниз). Во втором пункте добавляется геометрия: нить нерастяжима, а объём жидкости не меняется, поэтому смещения поршня, поплавка и уровня связаны.

Обозначения. m — масса поплавка, T — натяжение нити; давления отсчитываем от атмосферного: атмосфера давит и на поверхность жидкости, и на поршень снаружи (трубка открыта), и на верх поплавка, поэтому в условиях равновесия она сокращается.

Пункт 1. 1. Равновесие поршня. Ось поршня на глубине H под поверхностью; избыточное давление жидкости там $\rho g H$, и жидкость давит на поршень наружу, влево, с силой $\rho g H S_2$. Масса поршня мала, трения нет, поэтому условие равновесия поршня в проекции на горизонтальную ось:

$$T = \rho g H S_2.$$

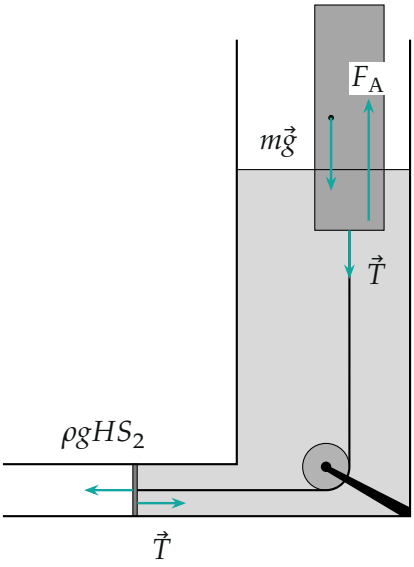


Рис. 2. Силы (без атмосферного давления, оно сокращается). Поплавок: архимедова сила $F_A = \rho g h S$ вверх, $m\vec{g}$ и натяжение $\vec{T}$ вниз. Поршень: давление

жидкости наружу и $\vec{T}$ внутрь. Длины стрелок — по модулю.

2. Равновесие поплавка. Блок у дна, поэтому нить тянет поплавок вниз. Погружённый объём hS, архимедова сила $\rho g h S$. Условие равновесия поплавка в проекции на вертикаль:

$$\rho g h S = mg + T.$$

Подставляем T из пункта 1:

$$m = \rho\,(hS - HS_2).$$

Пункт 2. 3. Куда сдвинется поршень. Груз тянет поплавок вниз, он погружается глубже; вертикальный участок нити укорачивается, и на столько же удлиняется горизонтальный — поршень уходит наружу, влево, на то же расстояние Δx, на которое опустился поплавок. Пусть уровень жидкости при этом поднялся на ΔH (знак проверим).

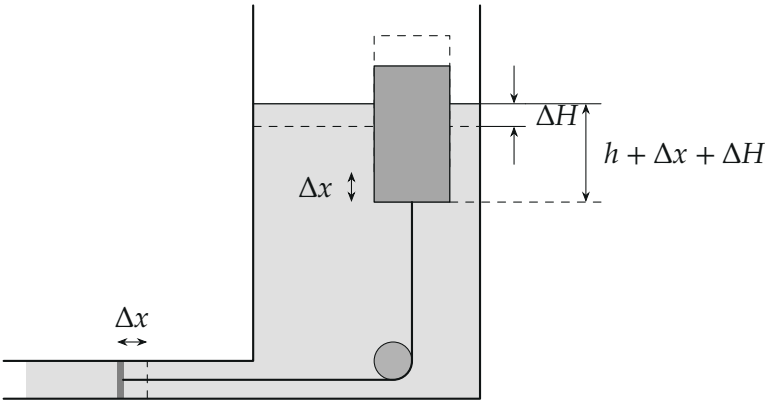


Рис. 3. Пунктир — до того, как положили груз, сплошные линии — после. Поршень ушёл влево на Δx, поплавок опустился на Δx, уровень поднялся на ΔH; глубина погружения поплавка стала $h + \Delta x + \Delta H$.

4. Объём жидкости не изменился. Сравним, где жидкость прибавилась и где убавилась (рис. 3). В трубке жидкость заняла лишний объём $S_2 \Delta x$ (поршень ушёл наружу). В сосуде над прежним уровнем добавился слой толщиной ΔH, но в нём часть сечения S занята поплавком:

прибавка $(S_1 - S)\Delta H$. Под прежним дном поплавка он сам вытеснил жидкость из слоя Δx: убыль $S\Delta x$. Сохранение объёма:

$$S_2\Delta x + (S_1 - S)\,\Delta H - S\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta H = \Delta x\,\frac{S - S_2}{S_1 - S}.$$

По условию $S > S_2$, а $S_1 > S$ (поплавок внутри сосуда), значит $\Delta H > 0$: уровень действительно поднимается.

5. Новое равновесие поршня и поплавка. Поршень теперь на глубине $H + \Delta H$, поэтому (рис. 4)

$$T' = \rho g\,(H + \Delta H)\,S_2.$$

Поплавок с грузом погружён на $h + \Delta x + \Delta H$:

$$\rho g S\,(h + \Delta x + \Delta H) = (m + \Delta m)\,g + T'.$$

Вычтем из этого равенства условие равновесия поплавка из пункта 2 и подставим $T' - T = \rho g \Delta H S_2$ — неизвестные m, h, H уходят:

$$\rho S(\Delta x + \Delta H) = \Delta m + \rho S_2 \Delta H \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta m}{\rho} = S\Delta x + (S - S_2)\,\Delta H.$$

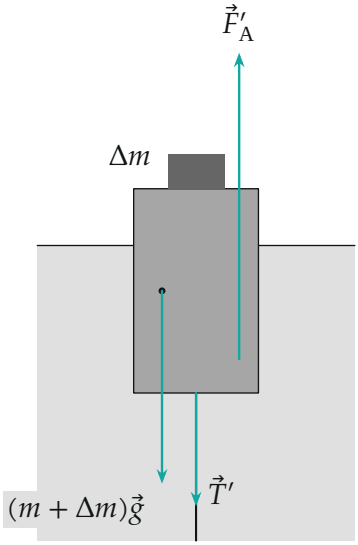


Рис. 4. Поплавок с грузом в новом равновесии: $F'_A = \rho g S(h + \Delta x + \Delta H)$ уравновешивает $(m + \Delta m)g$ и $T' = \rho g(H + \Delta H)S_2$.

6. Смещение поршня. Подставляем ΔH из шага 4:

$$\frac{\Delta m}{\rho} = \Delta x\left[S + \frac{(S - S_2)^2}{S_1 - S}\right] = \Delta x\,\frac{S_1 S - 2SS_2 + S_2^2}{S_1 - S},$$

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{\rho}\cdot\frac{S_1 - S}{S_1 S - 2SS_2 + S_2^2}.$$

Знаменатель можно записать как $S(S_1 - S) + (S - S_2)^2 > 0$, поэтому $\Delta x > 0$: поршень смещается влево, наружу из сосуда, как и предполагали.

Обратите внимание. Нить тянет поплавок вниз, а не вверх: блок стоит у дна. Поэтому в равновесии поплавка натяжение складывается с весом. И второе: поплавок опускается относительно дна на Δx, но его глубина погружения растёт на $\Delta x + \Delta H$ — уровень жидкости тоже поднимается.

Соберём ответ. $m = \rho(hS - HS_2)$; $\Delta x = \dfrac{\Delta m}{\rho}\cdot\dfrac{S_1 - S}{S_1 S - 2SS_2 + S_2^2}$, поршень сдвигается влево (наружу).

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}}{\text{кг/м}^3} \cdot \dfrac{\text{м}^2}{\text{м}^4} = \text{м}$. Предел очень широкого сосуда $S_1 \to \infty$: уровень не меняется, натяжение тоже, и весь груз держит добавочная архимедова сила, $\Delta x = \Delta m/(\rho S)$ — формула даёт то же. Предел $S_2 \to 0$ (поршня нет): $\Delta x = \dfrac{\Delta m}{\rho}\left(\dfrac{1}{S} - \dfrac{1}{S_1}\right)$, обычный результат для поплавка в узком сосуде.

Ответ. 1) $m = \rho\,(hS - HS_2)$; 2) поршень сместится влево (из сосуда наружу) на $\Delta x = \dfrac{\Delta m}{\rho} \cdot \dfrac{S_1 - S}{S_1 S - 2SS_2 + S_2^2}$.