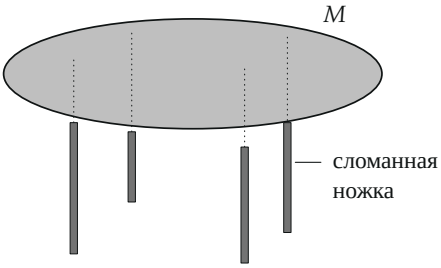
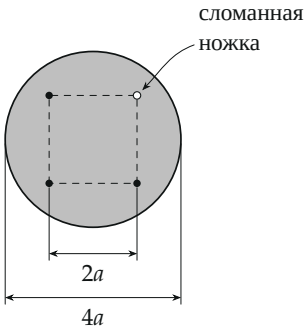
Стол и ваза

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 8 класс, задача 3] «Стол и ваза».

В гостиной стоит журнальный столик (на рисунках представлен вид стола сбоку (левый рисунок) и сверху (правый рисунок)), столешница которого представляет собой однородный диск радиуса $2a$. Масса столешницы M. Четыре одинаковые вертикальные ножки, масса которых пренебрежимо мала по сравнению с массой столешницы, крепятся к столешнице в вершинах квадрата со стороной $2a$. Центр квадрата, в вершинах которого крепятся ножки, совпадает с центром столешницы. Восьмиклассник случайно сломал одну ножку у журнального столика, ему удалось приделать её обратно, но при любой нагрузке на неё она снова отламывается от столешницы. Пришедшая домой мама принесла большой букет и попросила его поставить вазу с букетом на этот стол. Масса вазы с букетом равна $m = 5M$.





1. Существуют ли точки на столешнице, в которых можно разместить центр основания вазы с букетом так, чтобы столешница была горизонтальна?
2. Если да, то укажите все возможные их положения.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие твёрдого тела (правило моментов). Сломанная ножка не держит никакой нагрузки, поэтому стол опирается только на три целые ножки. Стол стоит, пока ни одна из трёх реакций не должна стать отрицательной: ножка может давить на столешницу вверх, но тянуть её вниз не может. Главная идея:

опрокинуться стол может только вокруг одной из сторон треугольника опоры, и для каждой стороны пишем правило моментов. Это то же, что условие «центр масс стола с вазой над треугольником опоры».

Обозначения. Начало координат — в центре столешницы, ось x вправо, ось y вверх на виде сверху. Целые ножки: $A(-a;\ a)$, $B(-a;\ -a)$, $C(a;\ -a)$; сломанная — $D(a;\ a)$. Центр основания вазы — точка $(x;\ y)$; Mg приложена в центре O, mg — в точке вазы.

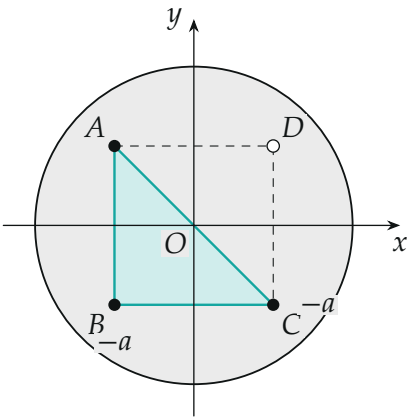


Рис. 2. Вид сверху. Бирюзовый треугольник ABC — опора стола на три целые ножки; D — сломанная. Сторона AC лежит на прямой $x + y = 0$ и проходит через центр O.

1. Когда стол без вазы стоит. Центр O лежит на стороне AC треугольника опоры (рис. 2): стол без вазы стоит «на грани» — на ножки A и C, ножка B не нагружена. Любой лишний груз со стороны D его опрокинет, груз со стороны B — прижмёт к трём ножкам.

2. Ось AC. Пусть стол начинает поворачиваться вокруг прямой AC, отрываясь от ножки B. Правило моментов относительно оси AC: сила Mg приложена на самой оси (центр O на прямой AC), её момент равен нулю. Повернуть стол вокруг AC в сторону D может только ваза, стоящая по ту же сторону от AC, что и D: удержать её там некому — реакции A и C лежат на оси и момента не дают, ножка B на другой стороне может лишь давить вверх (это поворачивает стол в ту же сторону), а ножка D

сломана. Значит, ваза не должна оказаться по ту сторону AC, где лежит D:

$$x + y \le 0.$$

На самой прямой $x + y = 0$ момент вазы тоже нулевой — стол стоит.

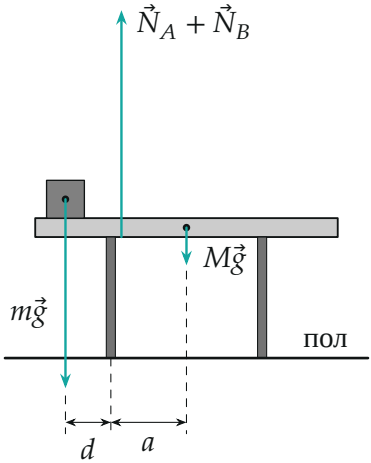


Рис. 3. Разрез вдоль оси x при опасном положении вазы за линией AB ($x < -a$). Ось вращения — прямая AB; плечо $M\vec{g}$ равно a, плечо $m\vec{g}$ равно $d = -a - x$. Левая ножка на рисунке — A и B (одна за другой), правая — C. Длины стрелок — по модулю ($m = 5M$).

3. Ось AB. Если вазу поставить за линию ножек A, B (левее $x = -a$), стол может опрокинуться вокруг прямой AB, отрываясь от ножки C. Правило моментов относительно оси AB в граничном положении (реакция ножки C стала нулевой, рис. 3): момент силы Mg с плечом a уравновешивает момент силы mg с плечом $d = -a - x$:

$$mg\,(-a - x) \le Mg\,a \quad \Rightarrow \quad -a - x \le \frac{M}{m}\,a = \frac{a}{5} \quad \Rightarrow \quad x \ge -\frac{6}{5}\,a.$$

4. Ось BC. Точно так же, симметрично относительно прямой $y = x$: вокруг прямой BC ($y = -a$) стол не опрокинется, если

$$y \ge -\frac{6}{5}\,a.$$

5. Второй способ — центр масс. Все три условия вместе означают, что общий центр масс стола и вазы

$$x_{\text{ц}} = \frac{M\cdot 0 + mx}{M+m} = \frac{5}{6}\,x, \qquad y_{\text{ц}} = \frac{5}{6}\,y$$

лежит над треугольником ABC: $x_{\text{ц}} \geq -a$, $y_{\text{ц}} \geq -a$, $x_{\text{ц}} + y_{\text{ц}} \leq 0$. Это те же неравенства. Геометрически: допустимая область вазы — треугольник опоры, растянутый от центра O в $6/5$ раза (рис. 4).

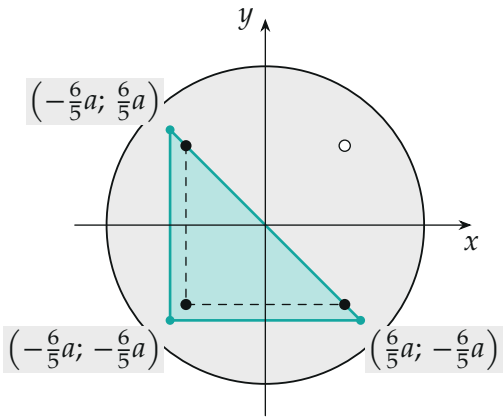


Рис. 4. Ответ: центр основания вазы должен лежать в бирюзовом треугольнике (включая границу). Пунктир — ножки и треугольник опоры ABC; бирюзовый треугольник больше него в $6/5$ раза.

6. Помещается ли область на столешнице. Самая далёкая от центра вершина $\left(-\frac{6}{5}a;\ -\frac{6}{5}a\right)$ отстоит от него на $\frac{6}{5}\sqrt{2}\,a \approx 1{,}7a < 2a$, так что весь треугольник лежит на столешнице. Значит, такие точки существуют.

Обратите внимание. Без вазы стол стоит на грани: центр O лежит на линии AC. Поэтому вазу нельзя ставить в половину стола со стороны сломанной ножки ни на каком расстоянии, а к линиям AB и BC, наоборот, можно выйти за ножки на $a/5$ — там вес столешницы помогает.

Соберём ответ. Да, существуют: центр основания вазы — внутри или на границе треугольника, ограниченного прямыми $x = -\frac{6}{5}a$, $y = -\frac{6}{5}a$ и $x + y = 0$, с вершинами $\left(\frac{6}{5}a;\ -\frac{6}{5}a\right)$, $\left(-\frac{6}{5}a;\ -\frac{6}{5}a\right)$, $\left(-\frac{6}{5}a;\ \frac{6}{5}a\right)$.

Проверка. Предел лёгкой вазы $m \to 0$: $-a - x \leq \frac{M}{m}a \to \infty$ — вазу можно ставить где угодно по эту сторону AC, как и должно быть. Предел тяжёлой вазы $m \gg M$: граница стремится к $x = -a$ — ваза должна стоять над треугольником опоры, вес стола уже не помогает.

Ответ. 1) да; 2) центр основания вазы — внутри (или на границе) треугольника, ограниченного прямыми $y = -x$, $x = -\frac{6}{5}a$, $y = -\frac{6}{5}a$ (начало координат — в центре столешницы, сломанная ножка в точке $(a;\, a)$); вершины треугольника $(\frac{6}{5}a;\, -\frac{6}{5}a)$, $(-\frac{6}{5}a;\, -\frac{6}{5}a)$, $(-\frac{6}{5}a;\, \frac{6}{5}a)$.