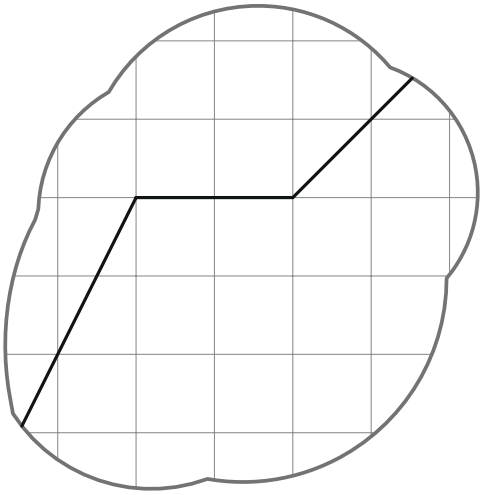
Потерянный график

Задача 4. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 8 класс, задача 4] «Потерянный график».

Экспериментатор Глюк решил выпить чай. Он налил воду комнатной температуры $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$ из графина в чайник и поставил его на газовую плиту постоянной мощности. Наблюдая за тем, как изменяется температура воды со временем, он строил соответствующий график. Через $\Delta\tau = 1$ мин после включения плиты Глюк понял, что воды в чайнике мало, и сразу начал доливать в него из графина ещё $V_{\text{дол}} = 0{,}5$ л воды, не снимая чайник с плиты. Пока он медленно доливал эту порцию воды, он видел, что температура воды оставалась постоянной и равной $t_1 = 60\,^\circ\text{C}$. После закипания чайника он случайно опалил огнём края получившегося графика (см. рис.) зависимости температуры воды t от времени τ. Тепловых потерь нет. Теплоёмкость чайника и испарение воды пренебрежимо малы. Удельная теплоёмкость воды равна $c = 4200$ Дж/(кг·°C), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.



1. Перечертите часть графика к себе в решение и восстановите его полную версию, считая, что включение плиты соответствовало времени $\tau_0 = 0$.
2. Какой изначальный объём воды V_0 Глюк налил в чайник?

3. В какой момент времени чайник начал кипеть?
4. Какова была мощность плиты P?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс и чтение графика. Плита каждую секунду отдаёт воде одну и ту же энергию P. На первом участке она греет воду объёма V_0, на третьем — вдвое (как окажется) больше воды, поэтому наклон меньше. На горизонтальном участке температура не растёт: вся энергия плиты уходит на нагрев доливаемой холодной воды от t_0 до t_1. Главная идея восстановления масштаба: и первый, и третий участки графика, продолженные назад, проходят через одну и ту же точку $(0;\, t_0)$ — это закон сохранения энергии для всей воды, которая к этому моменту в чайнике.

Обозначения. $m_0 = \rho V_0$ — начальная масса воды, $m_д = \rho V_{дол} = 0{,}5$ кг — масса долитой воды; τ_1 — начало доливания, τ_2 — его конец; k_1, k_3 — скорости нагрева (наклоны) на первом и третьем участках.

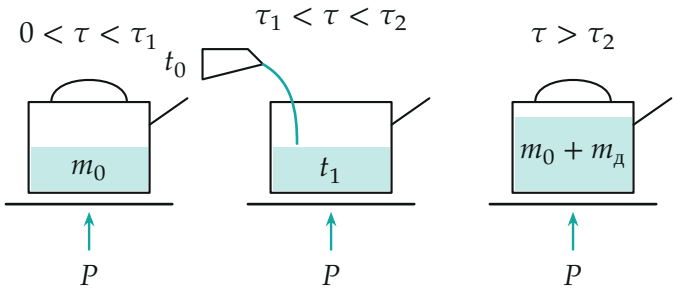


Рис. 2. Три этапа: нагрев начальной воды; доливание при постоянной температуре t_1; нагрев всей воды.

1. Первый участок. Закон сохранения энергии для воды в чайнике за время от включения плиты до момента $\tau < \tau_1$ (потерь нет, теплоёмкость чайника мала):

$$P\tau = cm_0\,(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad t = t_0 + k_1\tau, \qquad k_1 = \frac{P}{cm_0}.$$

График — прямая, выходящая из точки $(0;\, t_0)$.

2. Второй участок. Пока Глюк доливает воду, температура в чайнике постоянна и равна t_1. Значит, вся энергия плиты за время доливания $\Delta\tau$ ушла на нагрев долитой воды от t_0 до t_1:

$$P\,\Delta\tau = cm_{\text{д}}\,(t_1 - t_0).$$

3. Третий участок. Закон сохранения энергии для *всей* воды (начальной и долитой) от включения плиты до момента $\tau > \tau_2$: вся она была при t_0, а теперь при t, и всё это время плита давала мощность P:

$$P\tau = c\,(m_0 + m_{\text{д}})(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad t = t_0 + k_3\tau, \qquad k_3 = \frac{P}{c(m_0 + m_{\text{д}})}.$$

Продолжение третьего участка назад тоже проходит через точку $(0;\, t_0)$.

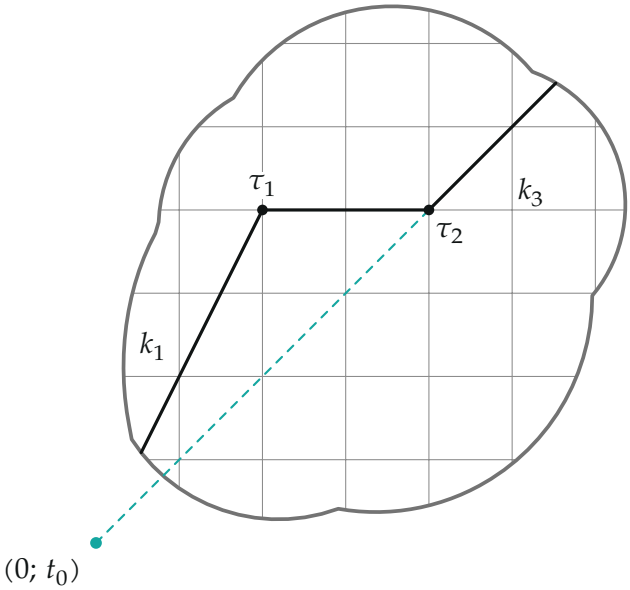


Рис. 3. Восстановление масштаба. Бирюзовый пунктир — продолжение третьего участка; оно встречает первый участок в узле сетки — это точка включения $(0;\, t_0)$.

4. Масштаб графика. Продолжим третий участок назад (рис. 3): он пересекает продолжение первого участка в узле сетки — это точка $\tau =$

0, $t = t_0 = 20\,^\circ\text{C}$. Горизонтальный участок лежит на 4 клетки выше неё и соответствует $t_1 = 60\,^\circ\text{C}$, поэтому одна клетка по вертикали — $10\,^\circ\text{C}$. Горизонтальный участок длится 2 клетки и начинается через 2 клетки после включения. По условию доливание началось через $\Delta\tau = 1$ мин после включения, значит одна клетка по горизонтали — 0,5 мин, а доливание длилось $\tau_2 - \tau_1 = 1$ мин: от $\tau_1 = 1$ мин до $\tau_2 = 2$ мин. Проверка: на первом участке рост на 4 клетки за 2 клетки времени, $k_1 = 40\,^\circ\text{C/мин}$, и $t(1\text{ мин}) = 60\,^\circ\text{C}$ — сходится с t_1.

5. Начальный объём. Наклоны первого и третьего участков (по графику: 2 клетки вверх на клетку вправо и 1 на 1):

$$\frac{k_1}{k_3} = \frac{m_0 + m_\text{д}}{m_0} = \frac{40\,^\circ\text{C/мин}}{20\,^\circ\text{C/мин}} = 2,$$

$$m_0 = m_\text{д}, \qquad V_0 = V_\text{дол} = 0{,}5\text{ л}.$$

Второй способ — через формулы шагов 1 и 2: $P \cdot 1\text{ мин} = cm_0 \cdot 40\,^\circ\text{C}$ и $P \cdot 1\text{ мин} = cm_\text{д} \cdot 40\,^\circ\text{C}$, откуда сразу $m_0 = m_\text{д}$.

6. Момент закипания. Из уравнения третьего участка при $t = 100\,^\circ\text{C}$:

$$\tau_\text{к} = \frac{100 - t_0}{k_3} = \frac{80\,^\circ\text{C}}{20\,^\circ\text{C/мин}} = 4\text{ мин}.$$

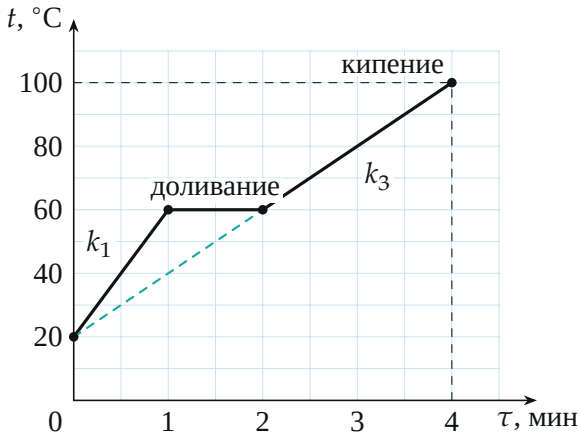


Рис. 4. Восстановленный график: (0; 20) — (1; 60) — (2; 60) — (4; 100),

время в минутах, температура в °C. Бирюзовый пунктир — продолжение третьего участка в точку $(0;\ t_0)$.

7. Мощность плиты. Из баланса на втором участке:

$$P = \frac{cm_{\text{д}}\,(t_1 - t_0)}{\Delta\tau} = \frac{4200 \cdot 0{,}5 \cdot 40}{60}\ \text{Вт} = 1400\ \text{Вт}.$$

Обратите внимание. Продолжение третьего участка проходит через точку $(0;\ t_0)$ не случайно: к моменту $\tau > \tau_2$ плита отдала энергию $P\tau$ всей воде, которая начинала при t_0, — и начальной, и долитой. Это и позволяет восстановить масштаб времени по обгоревшему графику без единой подписи на осях.

Соберём ответ. График: $(0;\ 20\,^\circ\text{C}) \to (1\ \text{мин};\ 60\,^\circ\text{C})$, горизонтально до 2 мин, затем $\to (4\ \text{мин};\ 100\,^\circ\text{C})$; $V_0 = 0{,}5$ л; закипание через $\tau_{\text{к}} = 4$ мин; $P = 1400$ Вт.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}} \cdot \text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}/\text{с} = \text{Вт}$. Второй способ для P — по третьему участку: $P = c(m_0 + m_{\text{д}})k_3 = 4200 \cdot 1 \cdot \frac{20}{60} = 1400$ Вт, то же. Полная энергия к закипанию $P\tau_{\text{к}} = 1400 \cdot 240 = 3{,}36 \cdot 10^5$ Дж $= c \cdot 1$ кг $\cdot\, 80\,^\circ$C — сходится.

Ответ. 1) график из трёх участков: прямая от $(0;\ 20\,^\circ\text{C})$ до $(1\ \text{мин};\ 60\,^\circ\text{C})$, горизонтальный отрезок при 60 °C от 1 до 2 мин, прямая от $(2\ \text{мин};\ 60\,^\circ\text{C})$ до $(4\ \text{мин};\ 100\,^\circ\text{C})$ (клетка — 0,5 мин и 10 °C); 2) $V_0 = 0{,}5$ л; 3) через 4 мин после включения; 4) $P = 1400$ Вт.