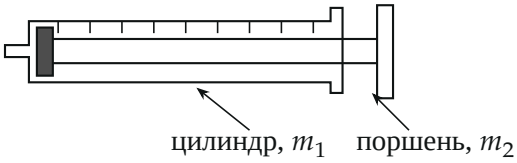
Шприц

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 9 класс, задача 1 (практический тур)] «Шприц».

Вам выдан шприц объёмом 10 мл без иглы. Масса цилиндрической части без поршня равна m_1, масса поршня — m_2 (см. рисунок). Координату центра масс системы «цилиндр + поршень + содержимое» обозначим x_{Ci} и отсчитывать вдоль шкалы шприца в мл.



1. Измерьте зависимость (не менее 10 точек) координаты центра масс системы x_{C1} (в мл) от показаний шприца V — объёма воздуха в нём (в мл). Постройте график зависимости $x_{C1}(V)$ и определите по нему отношение масс m_1/m_2.
2. Повторите измерения, заполняя шприц водой объёмом V. Для каждого значения V определите координату центра масс x_{C2} (не менее 10 точек). Постройте график зависимости $x_{C2}(V)$ на той же координатной плоскости, что и в пункте 1. Определите минимальное значение $x_{C2}^{\min}$.
3. Получите выражение, которое связывает между собой $x_{C1}(V)$ и $x_{C2}(V)$ — координаты центра масс шприца в случаях, когда внутри него V мл воздуха или воды соответственно. В полученном выражении должны содержаться только m_1, m_2, V, x_{C1}, x_{C2} и плотность воды ρ_0.
4. Зависимость, полученную в пункте 3, можно привести к виду $Y = kX$, где Y и X — переменные, зависящие от измеряемых параметров (V, x_{C1}, x_{C2}), а k — постоянный коэффициент, связанный с массами m_1 и m_2. Предложите соответствующие переменные Y и X. Постройте линейный график $Y(X)$ и по его параметрам определите массы m_1 и m_2.

Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, массой воздуха можно пренебречь. Вынимать поршень шприца из цилиндра запрещено. Оценка погрешностей в этой задаче не требуется.

Оборудование: шприц 10 мл без иглы; нить; кусочек малярного скотча; стакан с водой; масштабно-координатная бумага для построения графиков.

▲ **Решение. Что происходит.** Экспериментальная задача на центр масс и правило моментов. Центр масс находим подвесом: шприц на нити висит горизонтально, только если нить привязана точно над центром масс (иначе момент силы тяжести его поворачивает). Положение центра масс — взвешенное среднее положений частей; выдвигая поршень, мы смещаем одну часть известным образом, а вода добавляет третью часть известной массы. Так из одних лишь координат по шкале получаются массы.

Обозначения (рис. 2). Все координаты — по шкале шприца в мл. x_1 — центр масс цилиндра, x_2 — центр масс поршня при $V = 0$; при показании V поршень выдвинут на V, его центр масс — в $x_2 + V$. Вода объёмом V занимает шкалу от 0 до V, её масса $\rho_0 V$, центр масс — в $V/2$.

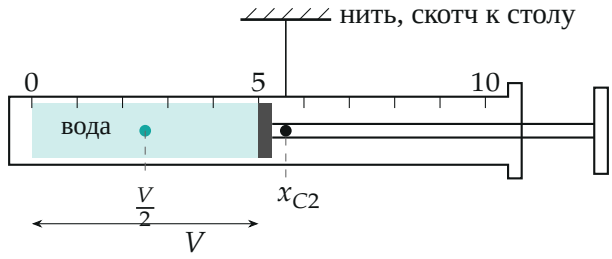


Рис. 2. Измерение: шприц висит на нити горизонтально, точка подвеса по шкале — центр масс x_{Ci}. Вода объёмом V — от нуля шкалы до поршня, её центр масс в $V/2$.

Пункт 1. Пустой шприц. Центр масс двух тел — взвешенное среднее:

$$x_{C1}(V) = \frac{m_1 x_1 + m_2 (x_2 + V)}{m_1 + m_2} = x_{C1}(0) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} V.$$

Зависимость линейная, угловой коэффициент $k_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$. Измерения (авторская установка):

V, мл	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_{C1}, мл	5,6	6,2	6,8	7,2	7,6	8,2	8,8	9,2	9,6	10,0

Метод наименьших квадратов (python): $x_{C1} = 5{,}72 + 0{,}490\,V$ (мл). Отсюда

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0{,}49 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{k_1} - 1 \approx 1{,}0.$$

Пункт 2. Шприц с водой. Измерения:

V, мл	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{C2}, мл	5,6	5,4	5,2	5,2	5,4	5,6	5,8	6,2	6,4	6,8	7,2

Сначала центр масс *сдвигается к носику*: вода набирается у нуля шкалы, левее центра масс шприца. Потом поршень с водой уходит далеко вправо, и центр масс тоже. Минимум $x_{C2}^{\min} \approx 5{,}2$ мл (при $V \approx 2$–3 мл). Теоретическая кривая

$$x_{C2}(V) = \frac{m_1 x_1 + m_2(x_2 + V) + \rho_0 V \cdot \frac{V}{2}}{m_1 + m_2 + \rho_0 V}$$

с массами из пункта 4 ($m_1 + m_2 = 6{,}0$ г, $m_2/(m_1 + m_2) = 0{,}49$) проходит по точкам (рис. 3) и даёт минимум 5,29 мл при $V = 2{,}5$ мл.

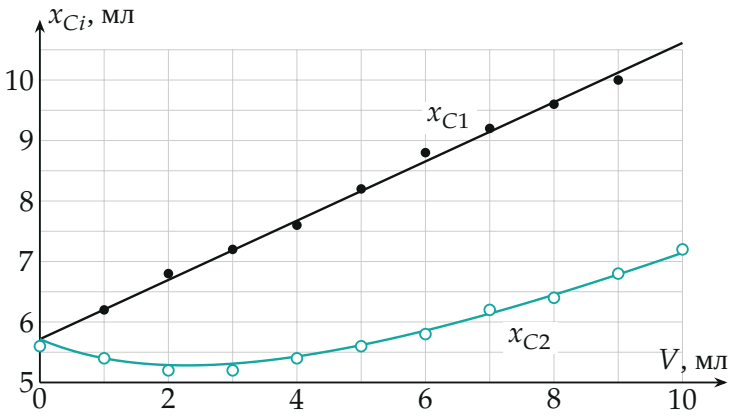


Рис. 3. Точки — измерения: чёрные x_{C1} (воздух), бирюзовые кружки x_{C2} (вода). Прямая — МНК, кривая — формула пункта 2 с найденными массами.

Пункт 3. Связь x_{C1} и x_{C2}. Шприц с водой висит на нити в точке x_{C2}. Правило моментов относительно точки подвеса (момент натяжения нити равен нулю, рис. 4): сила тяжести шприца $(m_1+m_2)g$ приложена в его центре масс $x_{C1}(V)$ — при том же положении поршня, сила тяжести воды $\rho_0 Vg$ — в $V/2$. Шприц правее подвеса тянет по часовой стрелке, вода левее — против:

$$(m_1+m_2)(x_{C1}-x_{C2})=\rho_0 V\left(x_{C2}-\frac{V}{2}\right).$$

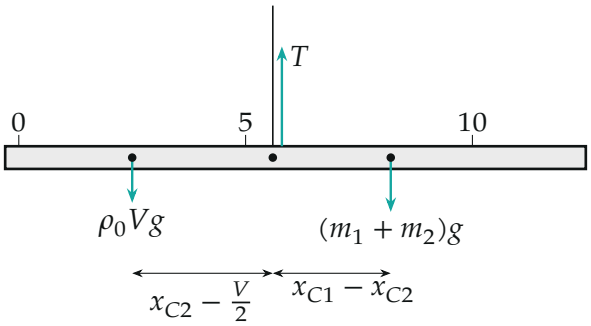


Рис. 4. Силы на шприц с водой ($V=5$ мл, длины стрелок пропорциональны: 6 г, 5 г, 11 г). Плечи — от точки подвеса.

Пункт 4. Линеаризация. Обозначим

$$Y = \rho_0 V\left(x_{C2} - \frac{V}{2}\right), \qquad X = x_{C1} - x_{C2}, \qquad Y = (m_1 + m_2)\,X,$$

коэффициент $k = m_1 + m_2$. С $\rho_0 = 1$ г/мл Y выходит в г·мл. Пересчёт (x_{C1} и x_{C2} при одном V):

V, мл	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X, мл	0,8	1,6	2,0	2,2	2,6	3,0	3,0	3,2	3,2
Y, г · мл	4,9	8,4	11,1	13,6	15,5	16,8	18,9	19,2	20,7

Прямая через начало координат по МНК (python): $k = \dfrac{\sum XY}{\sum X^2} = 6{,}0$ г (графически у организаторов 5,9 г). Тогда

$$m_1 + m_2 \approx 6{,}0\ \text{г}, \qquad m_2 = 0{,}49 \cdot 6{,}0 \approx 2{,}9\ \text{г}, \qquad m_1 \approx 3{,}1\ \text{г},$$

то есть $m_1 \approx m_2 \approx 3{,}0$ г.

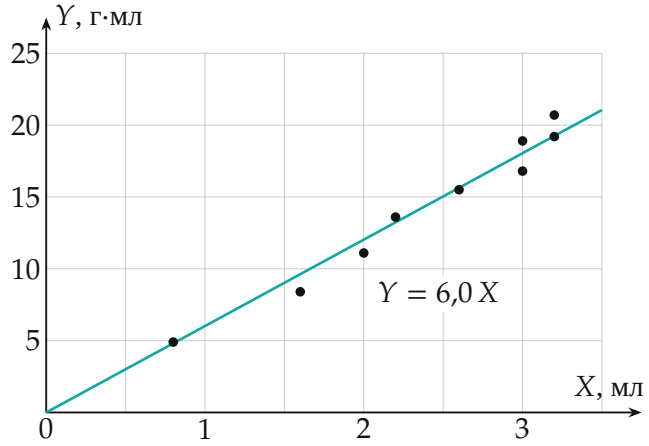


Рис. 5. Линеаризованный график: угловой коэффициент — масса шприца $m_1 + m_2$.

Обратите внимание. В пункте 3 x_{C1} берётся при том же V, что и x_{C2}: поршень выдвинут одинаково, разница только в содержимом. Точки при

больших V (X около 3) идут кучно и чувствительны к ошибке 0,2 мл в x_{C2} — отсюда разброс вокруг прямой.

Проверка. Размерность: Y — г·мл, X — мл, k — г. Независимая проверка: формула пункта 2 с $m_1 + m_2 = 6{,}0$ г и $x_{C1}(0) = 5{,}72$ мл даёт $x_{C2} = 5{,}40;\ 5{,}29;\ 5{,}31;\ 5{,}43;\ 5{,}62;\ 5{,}86;\ 6{,}14;\ 6{,}45;\ 6{,}79;\ 7{,}14$ мл при $V = 1 \ldots 10$ — совпадает с измерениями в пределах 0,1 мл.

Смысл: подвес на нити — «весы» без гирь: вода известной плотности служит эталоном массы.

Ответ. 1) $m_1/m_2 \approx 1{,}0$ (наклон $m_2/(m_1+m_2) \approx 0{,}49$); 2) $x_{C2}^{\min} \approx 5{,}2$ мл; 3) $(m_1 + m_2)(x_{C1} - x_{C2}) = \rho_0 V\left(x_{C2} - \frac{V}{2}\right)$; 4) $Y = \rho_0 V\left(x_{C2} - \frac{V}{2}\right)$, $X = x_{C1} - x_{C2}$, наклон $m_1 + m_2 \approx 6{,}0$ г, $m_1 \approx m_2 \approx 3{,}0$ г.