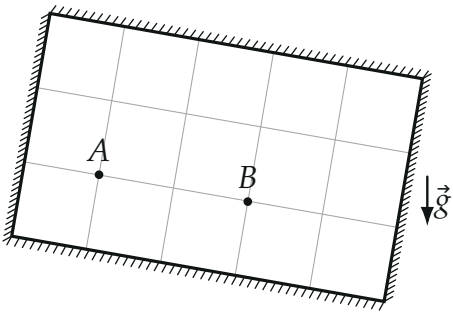
Шайба

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Шайба».

В вертикальной плоскости расположена прямоугольная рамка с жёсткими стенками. Точки A и B находятся внутри рамки так, как показано на рисунке: все расстояния до стенок, а также взаимное расположение точек следует принимать согласно масштабу рисунка. Перед началом опыта всю конструкцию (рамку вместе с точками A и B) можно повернуть в пределах одной вертикальной плоскости. После поворота рамки маленькую гладкую шайбу помещают в точку A и отпускают без начальной скорости.



Найдите все возможные ориентации рамки, при которых шайба после одного удара попадёт из точки A в точку B, и для каждой из них определите угол между отрезком AB и ускорением свободного падения.

Отражение шайбы от стенок рамки считайте абсолютно упругим: угол падения равен углу отражения, скорость не изменяется по модулю.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на движение с постоянным ускорением $\vec{g}$ и упругий удар. Направление $\vec{g}$ относительно рамки мы выбираем сами — его и ищем. Удобно смотреть на всё из рамки: в ней шайба движется с постоянным ускорением $\vec{g}$, повёрнутым на неизвестный угол. Оси берём вдоль AB и поперёк: тогда удар о стенку, параллельную AB, меняет знак только поперечной скорости, а продольная остаётся прежней. Движения вдоль осей независимы, и каждое — равноускоренное.

Обозначения (рис. 2). Стороны рамки 1–4; l — сторона клетки. Ось x — вдоль AB от A к B, ось y — перпендикулярно AB; $A = (0;\,0)$, $B = (L;\,0)$, $L = 2l$. g_x, g_y — проекции $\vec{g}$; H — расстояние от прямой AB до стенки, о которую бьётся шайба; α — угол между $\vec{g}$ и AB. По рисунку: до стороны 4 — l, до стороны 2 — $2l$, от A до стороны 1 — l, от B до стороны 3 — $2l$.

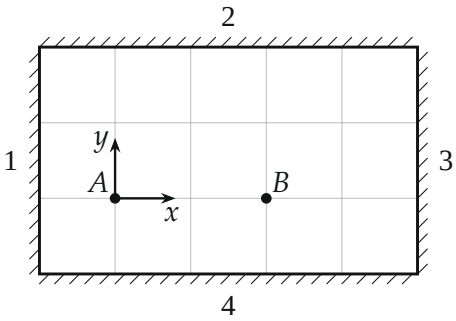


Рис. 2. Рамка в своих осях: x вдоль AB, y поперёк. Клетка — l; AB = 2l.

1. Шайба сначала движется по прямой вдоль $\vec{g}$. Она стартует из покоя, а ускорение постоянно, — до первого удара скорость направлена по $\vec{g}$. Значит, $\vec{g}$ (в осях рамки) смотрит на ту стенку, о которую будет удар.

2. Удар о сторону 1 или 3 (поперёк AB). Удар меняет знак v_x, а v_y не трогает.

- Если $g_y \neq 0$, движение по y — равноускоренное из покоя, $y = g_y t^2/2$ растёт по модулю всё время и к нулю больше не вернётся. Шайба никогда не окажется на прямой AB, в B не попадёт. Значит, $g_y = 0$, $\vec{g}$ вдоль AB.
- $\vec{g}$ к стороне 1 (против AB): шайба разгоняется влево, отскакивает и тормозится тем же ускорением. Движение по x симметрично удару, и шайба вернётся ровно в A с нулевой скоростью — до B не доберётся (закон сохранения энергии: B выше A).
- $\vec{g}$ к стороне 3, по AB: шайба падает вдоль AB, отражается от стороны 3 и поднимается обратно до высоты A — по пути проходит B. Подходит: $\alpha_3 = 0°$.

3. Удар о сторону 2 или 4 (вдоль AB). Удар меняет знак v_y, а v_x сохраняется. Проекция на y: равноускоренно из покоя до стенки за время t_0, второй закон Ньютона без сил, кроме тяжести и удара:

$$H = \frac{g_y t_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g_y}}.$$

После удара движение по y — то же, но в обратном времени: шайба вернётся на прямую AB ($y = 0$) ещё через t_0. Полное время $t = 2t_0$.

Проекция на x: удар v_x не меняет, и всё время $x = g_x t^2/2$. В момент $t = 2t_0$ шайба должна быть в B:

$$L = \frac{g_x (2t_0)^2}{2} = g_x \cdot \frac{4H}{g_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{g_y}{g_x} = \frac{4H}{L}.$$

Угол между $\vec{g}$ и AB:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g_y}{g_x} = \frac{4H}{L}.$$

4. Сторона 4. $H = l, L = 2l$: $\operatorname{tg}\alpha_4 = \dfrac{4l}{2l} = 2, \alpha_4 = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$. Шайба летит по прямой до стенки и попадает в неё на расстоянии $H \operatorname{ctg}\alpha_4 = l/2$ от A по x, после удара — по параболе в B (рис. 3).

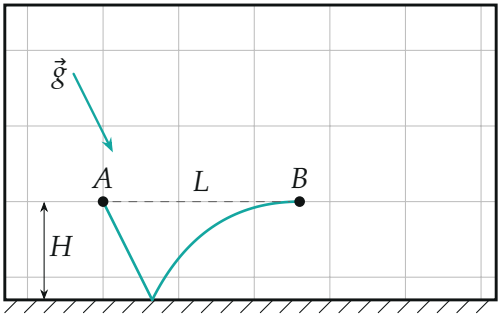


Рис. 3. Удар о сторону 4: $\operatorname{tg}\alpha_4 = 2$. *До удара — прямая вдоль* $\vec{g}$, *после — парабола (точки посчитаны:* $x = gt^2 \cos\alpha/2$, y *— зеркально).*

5. Сторона 2. $H = 2l, L = 2l$: $\operatorname{tg}\alpha_2 = 4, \alpha_2 = \operatorname{arctg} 4 \approx 76°$ (рис. 4).

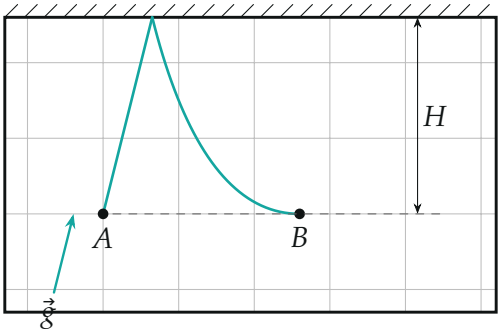


Рис. 4. Удар о сторону 2: $\operatorname{tg}\alpha_2 = 4$.

6. Все направления вместе. Прямые, по которым направлено $\vec{g}$, удобно построить по клеткам: при ударе о сторону 4 — через точку C_1 на $2l$ вдоль AB и на $4l$ поперёк к стороне 4, при ударе о сторону 2 — через C_2 ($2l$ вдоль, $8l$ к стороне 2). На рис. 5 вектор $\vec{g}_i$ — ускорение при ударе о сторону i.

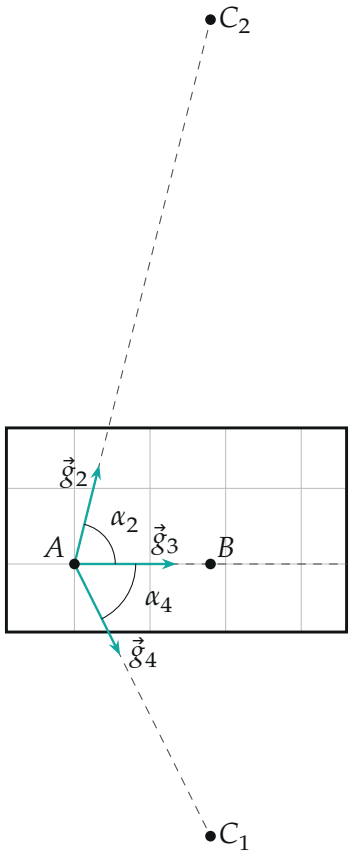


Рис. 5. Три допустимых направления $\vec{g}$ относительно рамки: $\vec{g}_2$ на C_2 ($\operatorname{tg}\alpha_2 = 4$), $\vec{g}_3$ вдоль AB, $\vec{g}_4$ на C_1 ($\operatorname{tg}\alpha_4 = 2$).

Обратите внимание. Сторона 1 не подходит при любом наклоне: удар о стенку поперёк AB лишь «отражает» движение по x, и шайба не уйдёт дальше A. А для стороны 3 годится только $\vec{g}$ строго вдоль AB — иначе шайба не вернётся на прямую AB.

Ответ. Три ориентации: удар о сторону 4 — $\alpha_4 = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$; о сторону 2 — $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 4 \approx 76°$; о сторону 3 — $\alpha_3 = 0$ ($\vec{g}$ вдоль AB).

Проверка. $\operatorname{tg}\alpha = 4H/L$ безразмерен. Предел: $H \to 0$ — стенка на прямой AB, $\alpha \to 0$: шайба скользит вдоль стенки по AB — разумно. Чем дальше стенка (H больше), тем круче должно быть $\vec{g}$ к AB, чтобы шайба успела слетать туда и обратно, пока по x проходит только L: $\alpha_2 > \alpha_4$.

Численно по формулам рис. 3 и 4 парабола при $t = 2t_0$ приходит точно в $(2l;\ 0)$.

Смысл: удар о стенку вдоль AB превращает движение по y в «туда и обратно» с удвоенным временем, а по x ничего не меняет.

Ответ. Три ориентации: удар о сторону, параллельную AB и ближнюю к точкам (4), — $\alpha_4 = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$; о противоположную (2) — $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 4 \approx 76°$; о сторону за точкой B (3) — $\vec{g}$ вдоль AB, $\alpha_3 = 0°$. От стороны за точкой A (1) попасть в B нельзя.