Нелинейная лента

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Нелинейная лента».

На рисунке 1 изображена система, состоящая из двух пружин и упругой ленты. Обе пружины с коэффициентом жёсткости $k = 100$ Н/м подчиняются закону Гука. График зависимости силы упругости от удлинения ленты изображён на рисунке 2. В недеформированном состоянии общая длина первой пружины и ленты равна длине второй пружины. К планке на правом конце системы прикладывают внешнюю силу F так, чтобы планка постоянно оставалась параллельной стене.

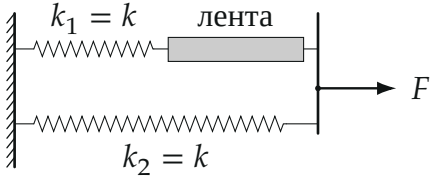

Рис. 1

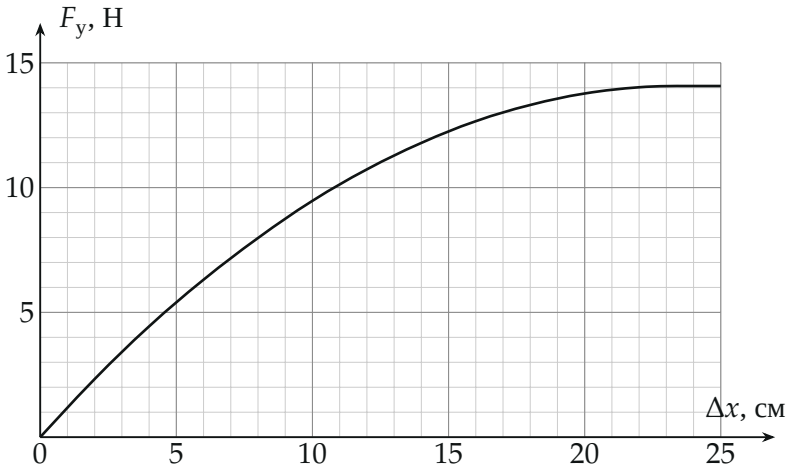

Рис. 2

1. Определите удлинения пружин Δx_1, Δx_2 и упругой ленты Δx для двух значений внешней силы: $F = 1{,}0$ Н и $F = 20$ Н.

2. С какой максимальной внешней силой $F_{\max}$ можно растягивать систему, если лента рвётся при удлинении $\Delta x_{\max} = 25$ см?

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на соединение упругих элементов и графическое решение. Верхняя ветвь — пружина 1 и лента последовательно: по ним идёт одна сила F_1. Нижняя ветвь — пружина 2, сила F_2. Обе ветви соединяют стену с одной планкой, поэтому удлинения ветвей равны. Лента нелинейна, её закон задан графиком, — вместо формулы для ленты получим прямую («нагрузочную», как в электрических цепях) и пересечём её с графиком.

Обозначения (рис. 3). F_1 — сила натяжения верхней ветви (пружина 1 и лента), F_2 — нижней; Δx_1, Δx_2 — удлинения пружин, Δx — ленты; k_0 — жёсткость ленты при малых удлинениях.

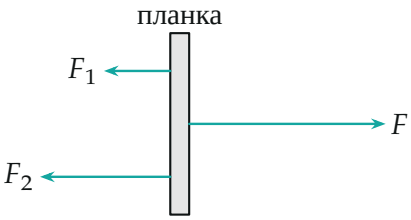

Рис. 3. Силы на лёгкую планку (длины стрелок — для $F = 20$ Н: $F_1 \approx 6{,}8$ Н, $F_2 \approx 13{,}2$ Н).

1. Равновесие планки. Планка лёгкая и движется медленно — по второму закону Ньютона в проекции на ось вдоль пружин

$$F = F_1 + F_2.$$

2. Законы упругих элементов. Закон Гука для пружин: $F_1 = k\Delta x_1$, $F_2 = k\Delta x_2$. Лента: $F_1 = F_y(\Delta x)$ — по графику.

3. Связь удлинений. Планка остаётся параллельной стене, а недеформированные ветви одной длины, — значит, удлинения ветвей равны:

$$\Delta x_1 + \Delta x = \Delta x_2.$$

4. Нагрузочная прямая. Подставляем $F_2 = k\Delta x_2 = k(\Delta x_1 + \Delta x) =$

$F_1 + k\Delta x$ в шаг 1:

$$F = 2F_1 + k\Delta x \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{F}{2} - \frac{k}{2}\Delta x. \tag{1}$$

Это прямая в осях графика ленты: начинается на высоте $F/2$, наклон $-k/2 = -0{,}5$ Н/см. Удлинение ленты — точка, где прямая (1) встречает график $F_y(\Delta x)$.

Пункт 1, $F = 1{,}0$ **Н.** Прямая (1) начинается на высоте 0,5 Н — это крошечный участок у начала графика, где он почти прямой. Заменяем график касательной (рис. 4): она проходит через (5 см; 6 Н), так что

$$k_0 = \frac{6\text{ Н}}{0{,}05\text{ м}} = 120\text{ Н/м}, \qquad F_1 = k_0\Delta x.$$

Подставляем в (1):

$$k_0\Delta x = \frac{F}{2} - \frac{k}{2}\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{F}{2k_0 + k} = \frac{1{,}0}{340}\text{ м} \approx 2{,}9\text{ мм}.$$

Тогда $F_1 = k_0\Delta x \approx 0{,}35$ Н — действительно на начальном участке. Удлинения пружин:

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} = \frac{k_0 F}{(2k_0 + k)k} \approx 3{,}5\text{ мм}, \qquad \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x \approx 6{,}5\text{ мм}.$$

Проверка шага 1: $F_1 + F_2 = 0{,}35 + 0{,}65 = 1{,}0$ Н.

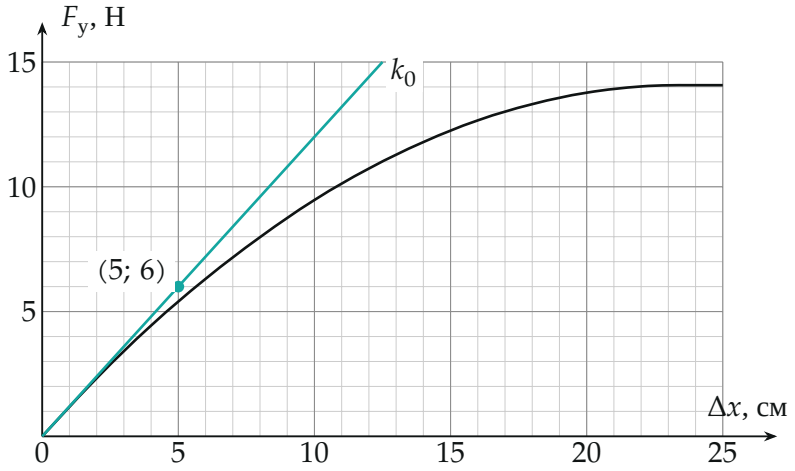

Рис. 4. Касательная к графику в начале: $k_0 = 6$ Н/5 см = 120 Н/м.

Пункт 1, $F = 20$ **Н.** Прямая (1): $F_1 = 10\text{ Н} - 0{,}5\ \frac{\text{Н}}{\text{см}} \cdot \Delta x$ — от $(0;\ 10)$ до $(20;\ 0)$. Пересечение с графиком (рис. 5): $\Delta x \approx 6{,}5$ см, $F_1 \approx 6{,}75$ Н. Тогда

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} \approx 6{,}7\text{ см}, \qquad \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x \approx 13{,}2\text{ см}.$$

Проверка: $F_2 = k\Delta x_2 \approx 13{,}25$ Н, $F_1 + F_2 \approx 20$ Н.

Пункт 2. Наклон прямой (1) от F не зависит — при росте F прямая поднимается параллельно себе, и точка пересечения ползёт вправо по графику. Лента рвётся при $\Delta x_{\max} = 25$ см, где $F_y = 14{,}1$ Н. Проводим прямую того же наклона через эту точку (рис. 5) или подставляем в (1):

$$F_{\max} = 2F_y(\Delta x_{\max}) + k\,\Delta x_{\max} = 2 \cdot 14{,}1 + 100 \cdot 0{,}25 \approx 53\text{ Н}.$$

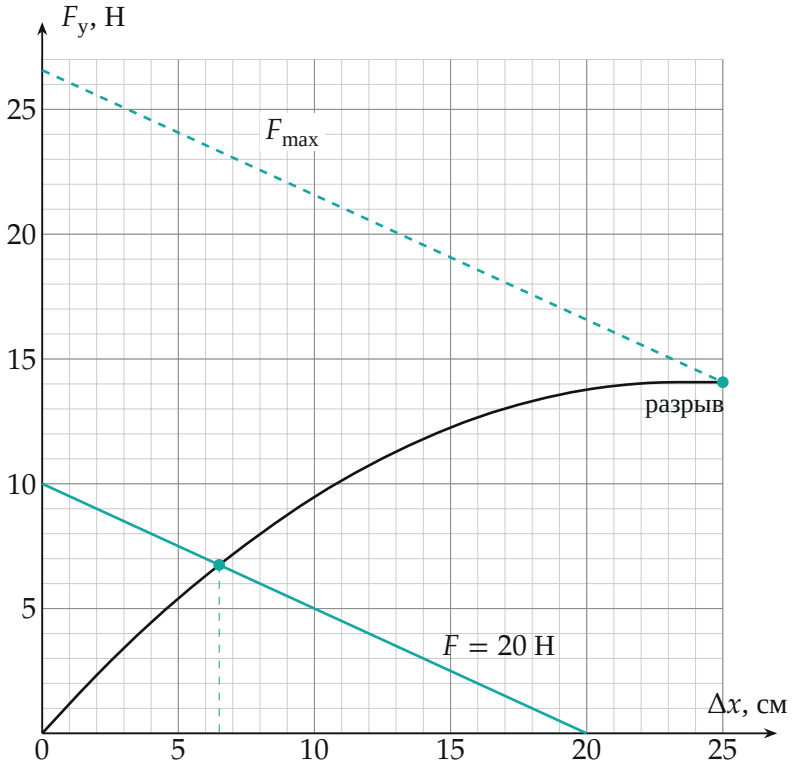

Рис. 5. Нагрузочные прямые (1): сплошная — $F = 20$ Н, пересечение при $\Delta x \approx 6{,}5$ см; пунктир — через точку разрыва (25; 14,1), начинается на высоте $F_{max}/2 \approx 26{,}6$ Н.

Обратите внимание. Пружина 1 и лента растягиваются одной силой F_1, а удлинения у них разные: лента при малых силах жёстче пружины ($k_0 > k$), при больших — мягче.

Проверка. Размерность: $\Delta x = F/(2k_0 + k)$ — Н/(Н/м) = м. Предел: если бы лента была нерастяжимой ($k_0 \to \infty$), $\Delta x \to 0$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = F/(2k)$ — две одинаковые пружины параллельно, так и должно быть. Численно: аппроксимация графика многочленом и решение (1) на python дают $\Delta x = 6{,}50$ см, $F_1 = 6{,}75$ Н при $F = 20$ Н.

Смысл: при росте силы лента «сдаётся», и всё больше нагрузки берёт на себя пружина 2.

Ответ. 1) $F = 1{,}0$ Н: $\Delta x \approx 2{,}9$ мм, $\Delta x_1 \approx 3{,}5$ мм, $\Delta x_2 \approx 6{,}5$ мм; $F = 20$ Н:

$\Delta x \approx 6{,}5$ см, $\Delta x_1 \approx 6{,}7$ см, $\Delta x_2 \approx 13{,}2$ см; 2) $F_{\max} \approx 53$ Н.