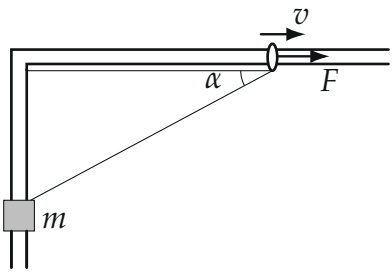
Тянем-потянем

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 9 класс, задача 3] «Тянем-потянем».

Гладкий тонкий стержень согнут под прямым углом и зафиксирован в горизонтальной плоскости. По одной его стороне может перемещаться небольшая втулка массой m, по другой — маленькое лёгкое колечко. К вершине прямого угла прикреплён один конец невесомой нерастяжимой нити длиной l. Нить продета через кольцо, и другой конец нити привязан к втулке. α — это угол между направлением от кольца к вершине прямого угла и направлением от кольца к втулке (см. рисунок). Колечко перемещают из вершины прямого угла с постоянной скоростью v. Трение отсутствует. В процессе всего движения нить натянута.



1. Определите скорость движения втулки в начальный момент времени, когда колечко движется вблизи вершины прямого угла.
2. Как зависит скорость движения втулки от угла α?
3. Чтобы колечко двигалось с постоянной скоростью v, к нему прикладывают силу F, направленную вдоль стержня. Как зависит сила F от угла α?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на кинематическую связь через нерастяжимую нить и второй закон Ньютона. Колечко уходит от вершины и «забирает» нить на участок вершина–колечко, поэтому участок колечко–втулка укорачивается и втулка едет к вершине. Связь «длина нити постоянна» даёт скорость втулки, производная скорости — её ускорение, а ускорение даёт натяжение нити. Колечко лёгкое — силы на него в сумме равны нулю, отсюда F. Стержень горизонтален, сила тяжести на движение вдоль стержней не влияет.

Обозначения (рис. 2). O — вершина угла; x — расстояние O–колечко, y — O–втулка; u — скорость втулки (к вершине), a — её ускорение; T — натяжение нити; N, N' — силы реакции стержня на втулку и колечко (перпендикулярны стержню, трения нет).

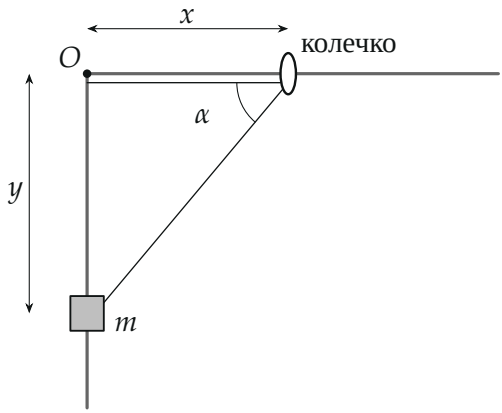


Рис. 2. Нить: O — колечко (длина x) — втулка (длина $\sqrt{x^2+y^2}$). Из прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\alpha = y/x$.

Геометрия. Длина нити постоянна:

$$x + \sqrt{x^2+y^2} = l. \tag{1}$$

Возведём $\sqrt{x^2+y^2} = l - x$ в квадрат: $y^2 = l^2 - 2lx$. И через угол: $\sqrt{x^2+y^2} = y/\sin\alpha$, $x = y/\operatorname{tg}\alpha$, из (1)

$$y = \frac{l\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{2}$$

Пункт 1. Колечко у вершины: $x \to 0$, $\alpha \to 90°$, нить от O идёт к втулке почти вдоль стержня с втулкой. За малое время Δt колечко уносит на участок O–колечко кусок нити $v\Delta t$, и ровно на столько же должна подтянуться втулка: $u\Delta t = v\Delta t$,

$$u(0) = v.$$

Пункт 2. За малое Δt колечко сместилось на $v\Delta t$, втулка — на $u\Delta t$ к вершине (рис. 3). Участок O–колечко удлинился на $v\Delta t$. Участок колечко–втулка меняется на проекции смещений концов на нить: колечко уходит от втулки — плюс $v\Delta t\cos\alpha$, втулка идёт к колечку — минус $u\Delta t\sin\alpha$. Длина нити не меняется:

$$v\Delta t + v\Delta t\cos\alpha - u\Delta t\sin\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad u = v\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = v\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

При $\alpha = 90^\circ$ получаем $u = v$ — совпадает с пунктом 1.

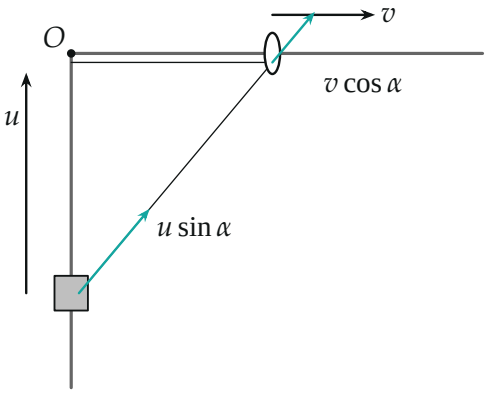


Рис. 3. Скорости колечка v и втулки u (длины для $\alpha = 50^\circ$, $u \approx 2{,}1v$) и их проекции на нить колечко–втулка: участок удлиняется со скоростью $v\cos\alpha$ и укорачивается со скоростью $u\sin\alpha$.

Второй способ. Из $y^2 = l^2 - 2lx$: за малое Δt изменение $2y\,\Delta y = -2l\,\Delta x$, то есть $u = -\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = v\,\dfrac{l}{y}$. С (2): $u = v\,\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ — то же.

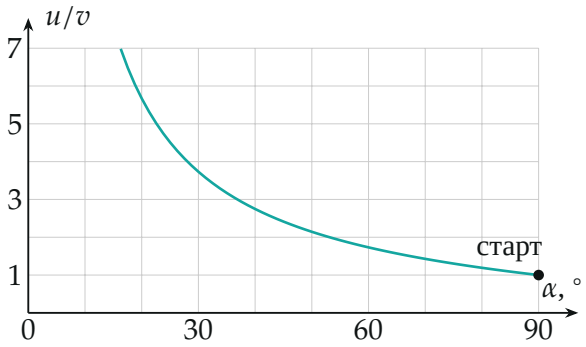


Рис. 4. Скорость втулки $u = v\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)$. Движение идёт справа налево: колечко уходит, угол α убывает от 90°, втулка разгоняется.

Пункт 3.

1. Ускорение втулки. Берём $u = vl/y$. Втулка подходит к вершине, y убывает со скоростью u; за малое Δt

$$\Delta u = -\frac{vl}{y^2}\,\Delta y = \frac{vl}{y^2}\,u\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{v^2 l^2}{y^3}.$$

С (2):

$$a = \frac{v^2}{l}\cdot\frac{(1+\cos\alpha)^3}{\sin^3\alpha}.$$

Ускорение направлено к вершине — по скорости втулки, она разгоняется.

2. Натяжение — второй закон Ньютона для втулки в проекции на её стержень. На втулку действуют натяжение T вдоль нити к колечку и реакция N поперёк стержня (рис. 5). Нить составляет со стержнем втулки угол $90^\circ - \alpha$, проекция натяжения на стержень $T\sin\alpha$:

$$ma = T\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mv^2}{l}\cdot\frac{(1+\cos\alpha)^3}{\sin^4\alpha}.$$

3. Сила на колечко — равновесие лёгкого колечка в проекции на его стержень. Колечко невесомо: сумма сил на него равна нулю. Нить тянет его двумя участками: к вершине (T, против $\vec{v}$) и к втулке (T, про-

екция на стержень $T\cos\alpha$, тоже против $\vec{v}$). Поперечные силы уравновешивает N'. Вдоль стержня:

$$F = T + T\cos\alpha = \frac{mv^2}{l}\cdot\frac{(1+\cos\alpha)^4}{\sin^4\alpha} = \frac{mv^2}{l}\operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

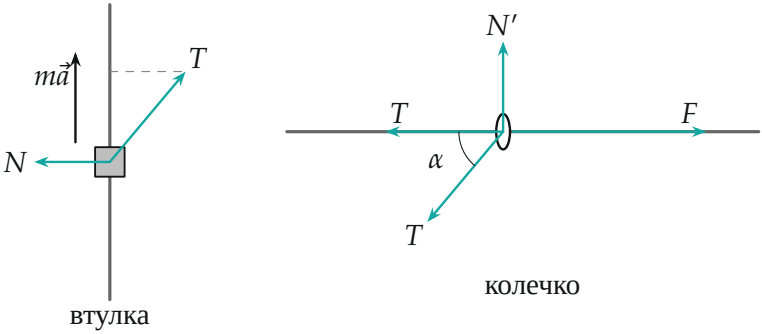


Рис. 5. Силы при $\alpha = 50°$ (длины в масштабе, T одинаково). Втулка: N гасит поперечную часть T, продольная $T\sin\alpha$ даёт та. Колечко: $F = T + T\cos\alpha$, $N' = T\sin\alpha$.

Обратите внимание. Нить тянет колечко *двумя* участками — поэтому в F стоит $1+\cos\alpha$, а не одно T. И скорость втулки растёт без предела при $\alpha \to 0$: к концу (колечко уходит на $l/2$, втулка у вершины) нужная сила $F \to \infty$, и равномерно тянуть колечко до конца невозможно.

Проверка. Размерность: $\frac{mv^2}{l}$ — кг $\cdot$ м^2/с^2/м $=$ Н. Предел $\alpha \to 90°$ (старт): $\operatorname{ctg}45° = 1$, $u = v$, $F = mv^2/l$ — втулка на расстоянии l от вершины, нить натянута вдоль её стержня, и ускорение $a = v^2/l$ конечно. Численно (python, производные $y(t) = \sqrt{l^2 - 2lvt}$ разностным способом при $x = 0{,}2l$): u, a и F совпали с формулами до 10^{-7}.

Смысл: равномерно движущееся колечко разгоняет втулку всё сильнее, и сила растёт как $\operatorname{ctg}^4(\alpha/2)$.

Ответ. 1) $u(0) = v$; 2) $u = v\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = v\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; 3) $F = \dfrac{mv^2}{l}\cdot\dfrac{(1+\cos\alpha)^4}{\sin^4\alpha} = \dfrac{mv^2}{l}\operatorname{ctg}^4\dfrac{\alpha}{2}$.