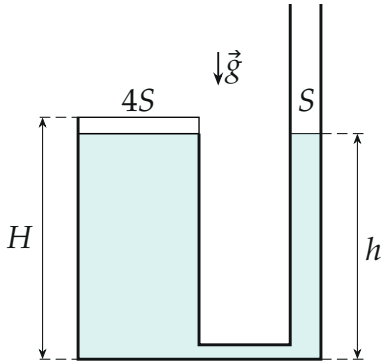
Нагрев жидкости

Задача 4. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 9 класс, задача 4] «Нагрев жидкости».

Два вертикальных цилиндрических сосуда соединены внизу тонкой трубкой, обеспечивающей свободное перетекание жидкости. Площади поперечных сечений сосудов равны $4S$ и S (см. рисунок). Сосуд большего сечения имеет высоту H и сверху герметично закрыт горизонтальной жёсткой крышкой, сосуд меньшего сечения значительно выше и открыт сверху. Снаружи вакуум. Сосуды заполняют экспериментальной жидкостью до высоты $h = 0{,}95H$ при температуре t_0. Известно, что при изменении температуры этой жидкости в интервале от t_0 до $2t_0$, её плотность линейно уменьшается с температурой от значения ρ_0 до значения $0{,}5\rho_0$. Температуру жидкости в сосуде большего сечения медленно повышают от t_0 до $2t_0$. После нагрева и установления равновесия в системе найдите:



1. давление жидкости на дне сосудов;
2. давление жидкости на крышку в сосуде большего сечения;
3. температуру жидкости в сосуде меньшего сечения.

Давлением насыщенных паров жидкости, теплоёмкостью сосудов, а также теплообменом с окружающей средой и через трубку, соединяющую сосуды, пренебречь. Ускорение свободного падения равно g. Удельную теплоёмкость жидкости можно считать постоянной.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на гидростатику и тепловой баланс. Нагретая жидкость в широком сосуде расширяется. Пока она не

упёрлась в крышку, её масса не меняется и перетекания нет. Потом объём жидкости в широком сосуде заперт крышкой: плотность падает — масса уходит в узкий сосуд, и каждая ушедшая порция несёт с собой тепло при текущей температуре. Давление на дно даёт масса в узком сосуде, температуру в нём — тепловой баланс принесённых порций.

Обозначения. t — текущая температура в широком сосуде; $\rho(t)$ — плотность; t_1 — температура, при которой жидкость дошла до крышки; $m_л$, $m_п$ — массы в широком (левом) и узком (правом) сосудах; c — удельная теплоёмкость; $t_п$ — искомая температура в узком сосуде.

1. Плотность. Линейная зависимость через две точки $(t_0;\,\rho_0)$ и $(2t_0;\,0{,}5\rho_0)$:

$$\rho(t) = \rho_0\,\frac{3t_0 - t}{2t_0}. \qquad (1)$$

2. До крышки — перетекания нет. Пока жидкость слева не дошла до крышки, давление на дне левого сосуда равно весу его столба на площадь: $p = m_л g/(4S)$. Если бы масса слева не менялась, давление на дне не менялось бы, и справа тоже — жидкость стоит. Значит, при расширении растёт только уровень слева. Крышка достигнута, когда весь объём $4SH$ занят прежней массой $4S\cdot 0{,}95H\rho_0$:

$$4SH\rho(t_1) = 4S\cdot 0{,}95H\rho_0 \;\Rightarrow\; \rho(t_1) = 0{,}95\rho_0 \;\Rightarrow\; t_1 = 1{,}1\,t_0.$$

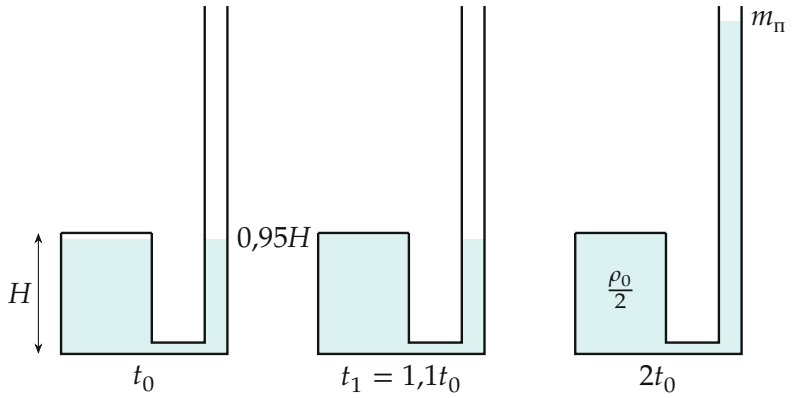


Рис. 2. Три момента: начало; жидкость слева дошла до крышки (t_1), справа

уровень прежний; конец ($2t_0$): слева плотность $\rho_0/2$, всё ушедшее — в узком сосуде.

Пункт 1. После t_1 объём жидкости слева — весь сосуд, $4SH$. При $2t_0$ плотность $\rho_0/2$:

$$m_л = 4SH \cdot \frac{\rho_0}{2} = 2\rho_0 SH.$$

Вся масса — начальная, $m = (4S + S) \cdot 0{,}95H\rho_0 = 4{,}75\rho_0 SH$. В узком сосуде

$$m_п = m - m_л = 2{,}75\rho_0 SH.$$

Сосуд цилиндрический и вертикальный: дно держит весь вес жидкости над собой (столб в узкой части и пренебрежимо малую трубку), как бы ни менялась плотность по высоте. Давление на дне

$$p_{дно} = \frac{m_п g}{S} = 2{,}75\rho_0 gH.$$

На том же уровне (дно соединено трубкой) это давление и в широком сосуде.

Пункт 2. Равновесие столба жидкости в широком сосуде: снизу давит $p_{дно} \cdot 4S$, сверху крышка $p_к \cdot 4S$ и сила тяжести $m_л g = 2\rho_0 SHg$ (рис. 3):

$$p_{дно} \cdot 4S = p_к \cdot 4S + m_л g \;\Rightarrow\; p_к = p_{дно} - \frac{\rho_0}{2} gH = 2{,}25\rho_0 gH.$$

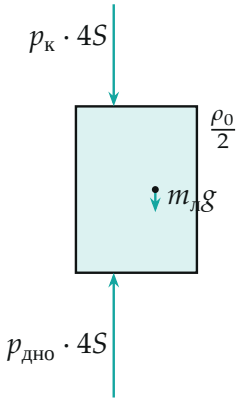


Рис. 3. Силы на жидкость в широком сосуде (длины в масштабе 11 : 9 : 2*).*

Пункт 3.

1. Сколько и какой жидкости уходит. После t_1 объём слева постоянен, $4SH$. При нагреве на малое Δt плотность падает на $\Delta\rho$, и в узкий сосуд уходит

$$\Delta m = 4SH\,|\Delta\rho|, \qquad (2)$$

с температурой t — текущей температурой слева. Из (1) $|\Delta\rho| = \frac{\rho_0}{2t_0}\Delta t$, так что $\Delta m = \frac{2\rho_0 SH}{t_0}\Delta t$: порции одинаковы на каждый градус, от t_1 до $2t_0$.

2. Тепло, принесённое порциями. Отсчитываем энергию от t_0. Порция Δm несёт тепло $c\,\Delta m\,(t - t_0) = 4cSH\,(t - t_0)\,|\Delta\rho|$ — это площадь полоски шириной $|\Delta\rho|$ и длиной $t - t_0$ на графике $\rho(t)$, умноженная на $4cSH$ (рис. 4). Все полоски от $\rho = 0{,}95\rho_0$ до $0{,}5\rho_0$ складываются в трапецию с основаниями $0{,}1t_0$ и t_0 и высотой $0{,}45\rho_0$:

$$Q = 4cSH \cdot \frac{0{,}1t_0 + t_0}{2} \cdot 0{,}45\rho_0 = 0{,}99\,c\rho_0 t_0 SH.$$

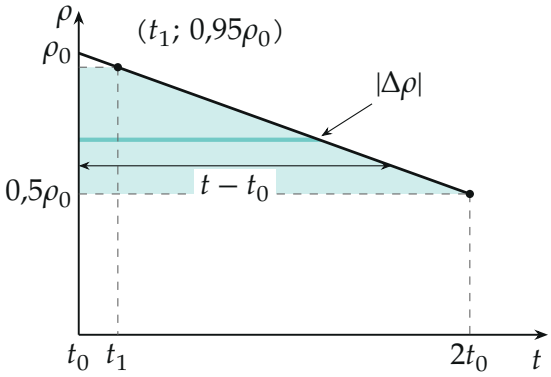


Рис. 4. График $\rho(t)$. Полоска — тепло одной порции (с множителем $4cSH$), трапеция — всё тепло, ушедшее в узкий сосуд.

3. Тепловой баланс узкого сосуда. Теплообмена с окружением нет, и вся энергия, принесённая порциями, распределяется по массе $m_\text{п}$ (на-

чальная масса справа уже при t_0, её вклад нулевой):

$$c\,m_{\text{п}}\,(t_{\text{п}}-t_0)=Q\;\Rightarrow\;t_{\text{п}}=t_0+\frac{0{,}99\,\rho_0 t_0 SH}{2{,}75\,\rho_0 SH}=t_0+0{,}36\,t_0=1{,}36\,t_0.$$

Второй способ — средняя температура порций. Порции одинаковы на каждый градус от $1{,}1t_0$ до $2t_0$, поэтому их средняя температура $t_{\text{ср}}=\frac{1{,}1t_0+2t_0}{2}=1{,}55t_0$. Масса порций $\Delta m=2{,}75-0{,}95=1{,}8$ (в единицах $\rho_0 SH$), начальная масса справа $0{,}95$ при t_0. Уравнение теплового баланса смеси:

$$t_{\text{п}}=\frac{0{,}95\,t_0+1{,}8\cdot 1{,}55\,t_0}{2{,}75}=1{,}36\,t_0.$$

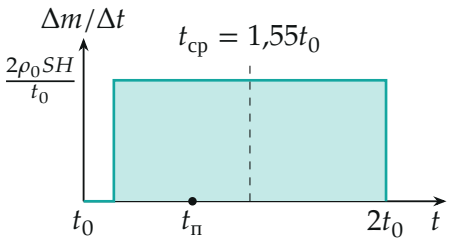


Рис. 5. Сколько массы уходит на градус нагрева: поровну на каждый градус от t_1 до $2t_0$ — средняя температура порций посередине. Смесь с холодной начальной жидкостью — $t_{\text{п}}=1{,}36t_0$.

Обратите внимание. В уравнении баланса нужна масса справа *в конце*, $2{,}75\rho_0 SH$: начальная жидкость справа тоже нагревается принесённым теплом.

Проверка. Размерности: $\rho_0 gH$ — давление. Знак: $p_{\text{к}}>0$ — жидкость действительно прижата к крышке, предположение о заполненном сосуде верно. Предел: если бы $h=H$ ($t_1=t_0$), трапеция стала бы треугольником площади $\frac{1}{2}t_0\cdot 0{,}5\rho_0$, $Q=c\rho_0 t_0 SH$, $m_{\text{п}}=3\rho_0 SH$, $t_{\text{п}}=\frac{4}{3}t_0$ — по второму способу $\frac{1+2\cdot 1{,}5}{3}t_0$ — совпадает. Точно: $t_{\text{п}}=t_0(1+0{,}99/2{,}75)=1{,}36\,t_0$.

Смысл: перетекание идёт только после того, как крышка «запирает» объём; тепло уносят порции, и узкий сосуд греется слабее широкого.

Ответ. 1) $p_{\text{дно}} = 2{,}75\rho_0 gH$; 2) $p_{\text{к}} = 2{,}25\rho_0 gH$; 3) $t_{\text{п}} = 1{,}36\,t_0$.