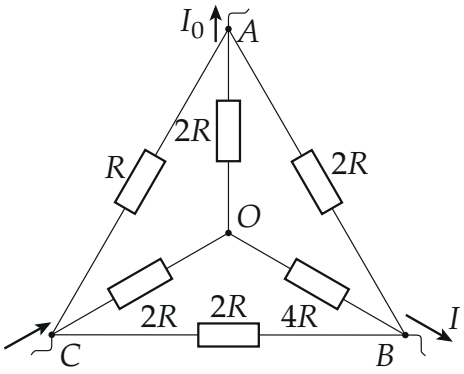
Звезда и треугольник

Задача 5. [ВсОШ 2025/26, региональный этап, 9 класс, задача 5] «Звезда и треугольник».

Фрагмент электрической цепи состоит из шести резисторов, соединённых как показано на рисунке. Из узла A всегда вытекает ток постоянной силы I_0. Из узла B вытекает ток силой I, которую можно регулировать как по модулю, так и по направлению (при $I > 0$ его направление совпадает с изображённым). Эту силу тока будем называть регулируемой. Втекающий в третий узел C ток определяется из закона сохранения электрического заряда.



1. Определите изменение силы тока $\Delta I_{\text{верх}}$ через резистор $2R$ между узлами A и O, если регулируемый ток увеличить на ΔI. Ответ выразите через ΔI.
2. Определите изменение силы тока $\Delta I_{\text{нижн}}$ через резистор $2R$ между узлами B и C, если регулируемый ток увеличить на ΔI. Ответ выразите через ΔI.
3. При каком значении регулируемой силы тока $I' > 0$ ток в одном из резисторов становится равным нулю? Укажите этот резистор. Ответ выразите через I_0.
4. При каком значении регулируемой силы тока I^* суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, будет минимальной? Чему равна эта минимальная мощность $P_{\min}$? Ответы выразите через I_0 и R.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на постоянный ток в разветвлённой цепи. Цепь линейна: токи во всех резисторах — суммы вкладов от двух «источников тока» — от I_0 (втекает в C, вытекает из A) и от I (втекает в C, вытекает из B). Это метод наложения. Для каждого источника цепь оказывается *сбалансированным мостом*: через один резистор ток не идёт, и токи считаются в уме.

Обозначения. Сопротивления по рисунку: $AC = R$, $AO = 2R$, $AB = 2R$, $CO = 2R$, $BO = 4R$, $CB = 2R$. φ — потенциалы узлов.

1. Источник I_0 отдельно ($I = 0$, рис. 2). Ток идёт из C в A. Рассмотрим мост с вершинами C и A и «диагональю» OB: плечи $CO = 2R$, $OA = 2R$ и $CB = 2R$, $BA = 2R$. Отношения $CO : OA = CB : BA = 1$, значит $\varphi_O = \varphi_B$ (обе точки — середины одинаковых делителей), и ток через $4R$ равен нулю. Тогда от C к A три параллельные ветви: R, $2R + 2R = 4R$ и $2R + 2R = 4R$. Ток делится обратно сопротивлениям $(1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{4})$:

$$I_{CA} = \tfrac{2}{3} I_0, \qquad I_{COA} = I_{CBA} = \tfrac{1}{6} I_0.$$

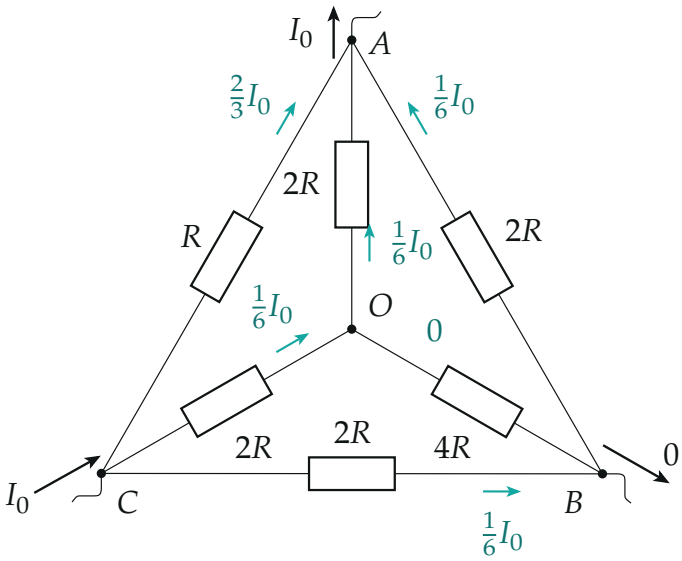


Рис. 2. Только источник I_0: мост с диагональю OB сбалансирован, через $4R$ тока нет.

2. Источник I отдельно ($I_0 = 0$, рис. 3). Ток идёт из C в B. Теперь мост с вершинами C, B и диагональю AO: плечи $CA = R$, $AB = 2R$ и $CO = 2R$, $OB = 4R$; $CA : AB = CO : OB = 1 : 2$, и $\varphi_A = \varphi_O$ — ток через AO равен нулю. Ветви от C к B: $2R$ (прямо), $R + 2R = 3R$ (через A), $2R + 4R = 6R$ (через O). Проводимости $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 3 : 2 : 1$:

$$I_{CB} = \tfrac{1}{2}I, \qquad I_{CAB} = \tfrac{1}{3}I, \qquad I_{COB} = \tfrac{1}{6}I.$$

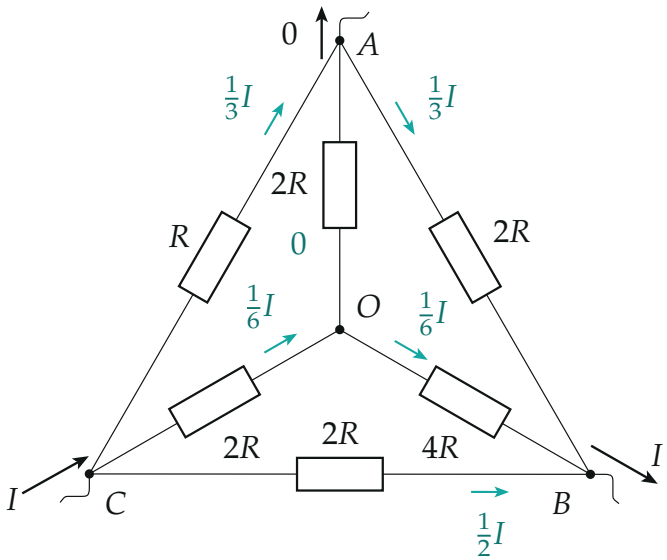


Рис. 3. Только регулируемый источник I: мост с диагональю AO сбалансирован, через верхний $2R$ тока нет.

3. Сумма — принцип наложения. Цепь из резисторов линейна: токи от двух источников складываются (с учётом направлений). Полные токи:

$$\begin{aligned}
O \to A\ (2R): &\quad \tfrac{1}{6}I_0, \\
C \to A\ (R): &\quad \tfrac{2}{3}I_0 + \tfrac{1}{3}I, \\
B \to A\ (2R): &\quad \tfrac{1}{6}I_0 - \tfrac{1}{3}I, \\
C \to O\ (2R): &\quad \tfrac{1}{6}I_0 + \tfrac{1}{6}I, \\
O \to B\ (4R): &\quad \tfrac{1}{6}I, \\
C \to B\ (2R): &\quad \tfrac{1}{6}I_0 + \tfrac{1}{2}I.
\end{aligned}$$

Проверка законом сохранения заряда в узле A: втекает $\frac{1}{6}I_0 + \frac{2}{3}I_0 + \frac{1}{3}I + \frac{1}{6}I_0 - \frac{1}{3}I = I_0$ — столько и вытекает. В узле B: $-\frac{1}{6}I_0 + \frac{1}{3}I + \frac{1}{6}I + \frac{1}{6}I_0 + \frac{1}{2}I = I$.

Пункт 1. Ток через верхний $2R$ равен $\frac{1}{6}I_0$ и от I не зависит: $\Delta I_{\text{верх}} = 0$.

Пункт 2. Ток через нижний $2R$ равен $\frac{1}{6}I_0 + \frac{1}{2}I$: $\Delta I_{\text{нижн}} = \frac{1}{2}\Delta I$.

Пункт 3. При $I > 0$ вклады обоих источников противоположны только в резисторе $2R$ между A и B (рис. 2 и 3: $\frac{1}{6}I_0$ от B к A, $\frac{1}{3}I$ от A к B). Остальные токи при $I > 0$ не обращаются в ноль (ток через $4R$ равен $\frac{1}{6}I \neq 0$). Условие

$$\tfrac{1}{3}I' = \tfrac{1}{6}I_0 \quad \Rightarrow \quad I' = \tfrac{1}{2}I_0,$$

ток пропадает в резисторе $2R$ между узлами A и B.

Пункт 4. Мощность — сумма джоулевых мощностей $I_k^2 R_k$ по резисторам (закон Джоуля — Ленца):

$$\frac{P}{R} = 2\left(\tfrac{I_0}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{2I_0}{3} + \tfrac{I}{3}\right)^2 + 2\left(\tfrac{I_0}{6} - \tfrac{I}{3}\right)^2 + \\ + 2\left(\tfrac{I_0+I}{6}\right)^2 + 4\left(\tfrac{I}{6}\right)^2 + 2\left(\tfrac{I_0}{6} + \tfrac{I}{2}\right)^2.$$

Раскрываем скобки:

$$P = R\left(I^2 + \tfrac{2}{3}I_0 I + \tfrac{2}{3}I_0^2\right).$$

Второй способ — мощность «источников». Мощность, выделяемая в цепи, равна работе за секунду, которую совершают источники: $P = I_0 U_{AC} + I U_{BC}$, где $U_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = R\left(\frac{2}{3}I_0 + \frac{1}{3}I\right)$ (по резистору R), $U_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = 2R\left(\frac{1}{6}I_0 + \frac{1}{2}I\right)$ (по нижнему $2R$):

$$P = R\left(\tfrac{2}{3}I_0^2 + \tfrac{1}{3}I_0 I\right) + R\left(\tfrac{1}{3}I_0 I + I^2\right) = R\left(I^2 + \tfrac{2}{3}I_0 I + \tfrac{2}{3}I_0^2\right).$$

Совпало. Это парабола по I ветвями вверх (рис. 4); её вершина

$$I^* = -\frac{\frac{2}{3}I_0}{2} = -\frac{I_0}{3}, \qquad P_{\min} = R\left(\tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{3}\right)I_0^2 = \frac{5}{9}RI_0^2.$$

Минус: ток из B надо не отбирать, а вводить, $\frac{1}{3}I_0$. При этом ток через нижний $2R$ равен $\frac{1}{6}I_0 - \frac{1}{6}I_0 = 0$: весь ток $\frac{2}{3}I_0$, входящий в C, и $\frac{1}{3}I_0$, входящий в B, идут к A.

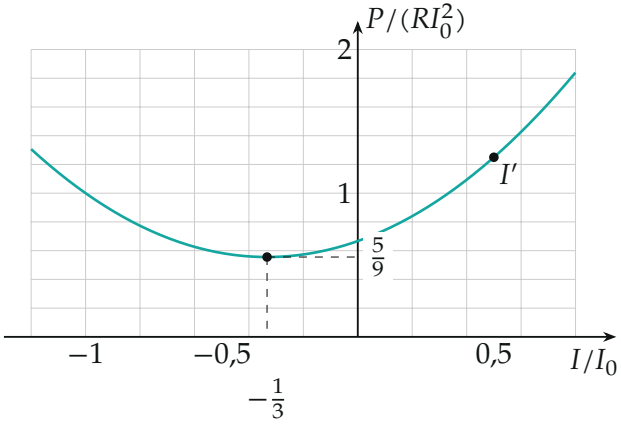


Рис. 4. Мощность $P(I) = R\left(I^2 + \frac{2}{3}I_0 I + \frac{2}{3}I_0^2\right)$: минимум $\frac{5}{9}RI_0^2$ при $I^* = -\frac{1}{3}I_0$; точка I' — пункт 3.

Обратите внимание. $I^* < 0$: минимум мощности — когда в узел B ток *втекает*. Знак I по условию — направление, а не «нельзя меньше нуля».

Проверка. Размерности: RI^2 — ватты. При $I = 0$ мощность $\frac{2}{3}RI_0^2$ — это I_0^2 на эквивалентном сопротивлении $R \parallel 4R \parallel 4R = \frac{2}{3}R$ между C и A (шаг 1) — совпадает. Независимо — метод узловых потенциалов на python ($\varphi_C = 0$, три уравнения): токи шага 3, $P(0) = \frac{2}{3}$, $P(I^*) = \frac{5}{9}$ (в единицах RI_0^2).

Смысл: сбалансированные мосты развязывают цепь — верхний резистор «не чувствует» регулируемый ток.

Ответ. 1) $\Delta I_{\text{верх}} = 0$; 2) $\Delta I_{\text{нижн}} = \Delta I/2$; 3) $I' = I_0/2$, ток обнуляется в резисторе $2R$ между узлами A и B; 4) $I^* = -I_0/3$, $P_{\min} = \frac{5}{9}RI_0^2$.