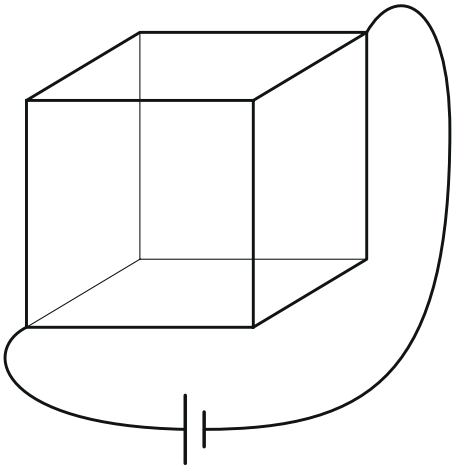
Проволочный куб

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 10 класс, задача 3] «Проволочный куб».

Проволочный каркас куба образован двенадцатью одинаковыми отрезками провода сопротивлением $R = 6$ Ом каждый. К двум вершинам каркаса подключён идеальный источник питания с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В (см. рисунок).



1. Найдите эквивалентное сопротивление между вершинами, к которым подключён источник. Ответ выразите в Ом, округлив до десятых долей.
2. Определите ток через источник. Ответ выразите в А, округлив до десятых долей.
3. Найдите количество теплоты, которое выделится за время $\tau = 60$ с в одном из трёх рёбер, исходящих из вершины, подключённой к положительному полюсу источника. Ответ выразите в Дж, округлив до целого числа.
4. За какое время во всём каркасе выделится теплота $Q = 2{,}3 \cdot 10^2$ Дж? Ответ выразите в с, округлив до десятых долей.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на расчёт цепи с симметрией. Источник подключён к концам пространственной диагонали куба. Куб

симметричен относительно поворота вокруг этой диагонали на 120°: при таком повороте вершины источника остаются на месте, а три ребра у каждой из них переходят друг в друга. Значит, токи в этих рёбрах одинаковы, и вершины, переходящие друг в друга, имеют одинаковый потенциал. Точки с равным потенциалом можно соединить проводом — токи от этого не изменятся. Каркас превращается в цепочку из трёх групп параллельных рёбер.

Обозначения. 1 — вершина у «+» источника, 8 — у «−»; 2, 3, 4 — соседи вершины 1; 5, 6, 7 — соседи вершины 8; I — ток через источник; $R_{\text{экв}}$ — сопротивление каркаса между вершинами 1 и 8.

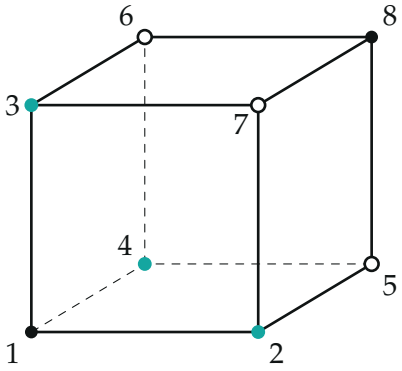


Рис. 1. Вершины куба: бирюзовые 2, 3, 4 имеют одинаковый потенциал, белые 5, 6, 7 — тоже

1. Где одинаковые потенциалы. Повернём куб вокруг диагонали 1–8 на 120°. Вершины 1 и 8 останутся на месте, вершины $2 \to 3 \to 4 \to 2$ и $5 \to 6 \to 7 \to 5$ переставятся по кругу. Цепь после поворота та же, источник тот же — значит, и токи те же. Поэтому

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4, \qquad \varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_7.$$

Соединим вершины 2, 3, 4 одним проводом, а вершины 5, 6, 7 — другим. Ток по этим проводам не потечёт (концы при одном потенциале), так что токи в рёбрах не изменятся.

2. Эквивалентная схема. После соединения рёбра разбиваются на три группы (рис. 2):

- три ребра от вершины 1 к узлу $\{2,3,4\}$ — соединены параллельно: $R/3$;
- шесть рёбер между узлами $\{2,3,4\}$ и $\{5,6,7\}$ (у каждой из вершин $2,3,4$ по два таких ребра) — параллельно: $R/6$;
- три ребра от узла $\{5,6,7\}$ к вершине 8 — параллельно: $R/3$.

Группы соединены последовательно:

$$R_{\text{экв}} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5R}{6} = \frac{5\cdot 6}{6}\ \text{Ом} = 5{,}0\ \text{Ом}.$$

Счёт рёбер: $3 + 6 + 3 = 12$ — все рёбра учтены.

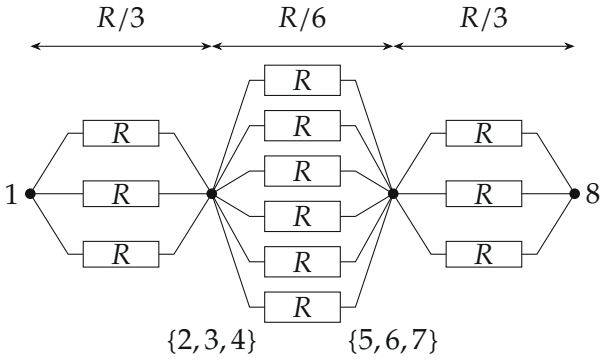


Рис. 2. Каркас после соединения равнопотенциальных вершин: три группы параллельных рёбер, включённые последовательно

3. Ток через источник — закон Ома для замкнутой цепи с идеальным источником (внутреннего сопротивления нет):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{экв}}} = \frac{6\mathcal{E}}{5R} = \frac{12}{5{,}0}\ \text{А} = 2{,}4\ \text{А}.$$

4. Теплота в ребре у «+». Ток I входит в вершину 1 и по симметрии делится поровну между тремя рёбрами: в каждом $I_1 = I/3 = 0{,}8$ А. В каждом из шести средних рёбер — $I/6 = 0{,}4$ А (рис. 3). Теплота в одном ребре за время τ — закон Джоуля–Ленца:

$$Q_1 = I_1^2 R\tau = \left(\frac{I}{3}\right)^2 R\tau = 0{,}8^2\cdot 6\cdot 60\ \text{Дж} = 230{,}4\ \text{Дж} \approx 230\ \text{Дж}.$$

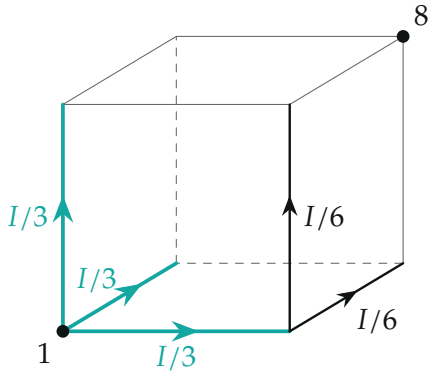


Рис. 3. Ток I делится поровну на три ребра у вершины 1; каждая из вершин 2, 3, 4 отдаёт свои $I/3$ двум рёбрам по $I/6$

5. Время выделения теплоты Q во всём каркасе. Вся энергия, которую отдаёт идеальный источник, выделяется теплом в рёбрах. Мощность

$$P = \mathcal{E} I = 12 \cdot 2{,}4 \text{ Вт} = 28{,}8 \text{ Вт}.$$

Второй способ — сложить по рёбрам: $6 \cdot I_1^2 R + 6 \cdot (I/6)^2 R = 6 \cdot 0{,}64 \cdot 6 + 6 \cdot 0{,}16 \cdot 6 = 23{,}04 + 5{,}76 = 28{,}8$ Вт — совпадает. Мощность постоянна, поэтому

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{230}{28{,}8} \text{ с} \approx 8{,}0 \text{ с}.$$

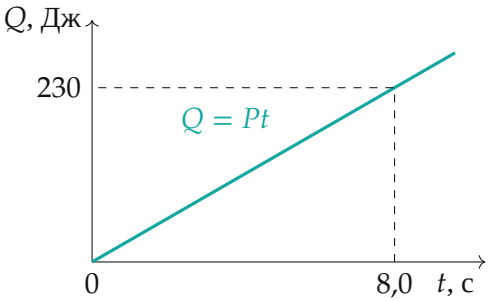


Рис. 4. Теплота растёт линейно со временем: $Q = 230$ Дж набирается за 8,0 с

Обратите внимание. Соединять можно только точки с *равным* потенциалом. Вершины 2 и 5, хоть и соседние, имеют разные потенциалы: по ребру 2–5 течёт ток $I/6$.

Проверка. Размерности: Ом, А, Дж, с. Второй способ для $R_{\text{экв}}$: напряжение $1 \to 8$ равно сумме падений вдоль пути $1 \to 2 \to 5 \to 8$: $\frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R = \frac{5}{6}IR$, то есть $R_{\text{экв}} = \frac{5}{6}R$ — совпадает. Предел: $R_{\text{экв}} = 5$ Ом меньше одного ребра (6 Ом) — параллельные пути уменьшают сопротивление.

Смысл: симметрия сразу показывает узлы равного потенциала, и объёмная схема сводится к трём последовательным группам.

Ответ. 1) $R_{\text{экв}} = \frac{5}{6}R = 5{,}0$ Ом; 2) $I = 2{,}4$ А; 3) $Q_1 \approx 230$ Дж; 4) $t \approx 8{,}0$ с.