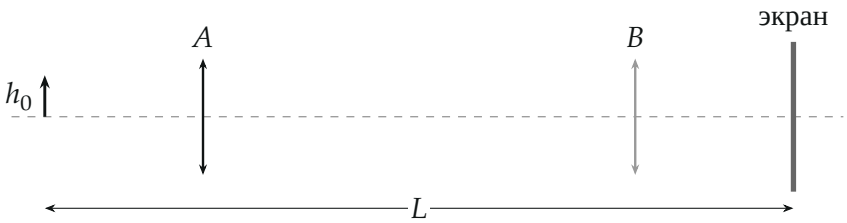
Два положения

Задача 5. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 10 класс, задача 5] «Два положения».

Предмет высотой $h_0 = 5{,}0$ см закреплён на расстоянии $L = 90$ см от экрана и параллелен ему. Между предметом и экраном помещают тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 15$ см; ось линзы перпендикулярна экрану. Линзу перемещают вдоль её главной оптической оси. На экране формируется чёткое изображение предмета, когда оптический центр линзы находится в двух положениях: A (ближе к предмету) и B.

1. Чему равно расстояние между положениями A и B? Ответ выразите в см, округлив до целого числа.
2. Определите поперечное увеличение Γ_A, когда линза находится в положении A. Ответ округлите до десятых долей.
3. Найдите высоту изображения h_B, когда линза находится в положении B. Ответ выразите в см, округлив до сотых долей.



Поясняющий рисунок. Предмет, экран и два положения линзы, при которых изображение на экране резкое

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на формулу тонкой линзы. Расстояние «предмет–экран» L задано, и изображение должно попасть ровно на экран. Значит, расстояния от линзы до предмета d и до изображения $L - d$ связаны формулой линзы — получается квадратное уравнение на d. Два его корня и есть два положения A и B. Из-за обратимости хода лучей корни переходят друг в друга заменой $d \leftrightarrow L - d$.

Обозначения. d — расстояние от предмета до линзы; $L - d$ — от линзы до экрана (там изображение); $d_A < d_B$ — корни; $\Delta = d_B - d_A$;

$\Gamma = \dfrac{L-d}{d}$ — поперечное увеличение (по модулю).

1. Уравнение для положения линзы. Изображение действительное, на экране, поэтому формула тонкой собирающей линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{L-d} = \frac{1}{f} \implies \frac{L}{d(L-d)} = \frac{1}{f} \implies d^2 - Ld + Lf = 0.$$

Числа: $d^2 - 90d + 1350 = 0$. Дискриминант положителен, если $L^2 > 4Lf$, то есть $L > 4f = 60$ см, — у нас $90 > 60$, два положения существуют. Корни

$$d_{A,B} = \frac{L \mp \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2} = \frac{90 \mp \sqrt{2700}}{2}\ \text{см}, \qquad d_A = 19{,}0\,\text{см}, \quad d_B = 71{,}0\,\text{см}.$$

Заметим: $d_A + d_B = L$, то есть $d_B = L - d_A$ — в положении B линза стоит от предмета там, где в положении A стояла от экрана.

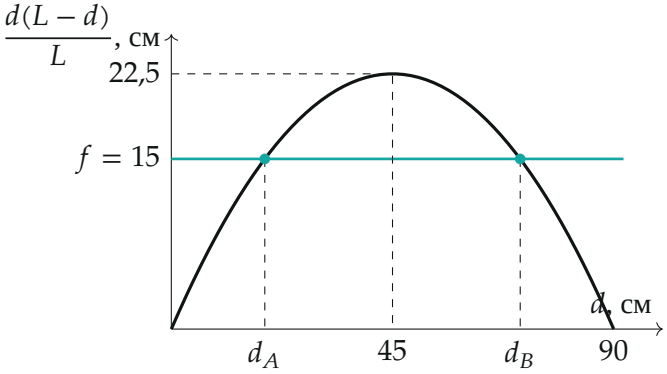


Рис. 1. Резкое изображение получается, когда $\frac{d(L-d)}{L} = f$: прямая f пересекает параболу в двух точках. Наибольшее значение $L/4$ — поэтому нужно $L > 4f$

Пункт 1. Расстояние между положениями:

$$\Delta = d_B - d_A = \sqrt{L^2 - 4Lf} = \sqrt{90^2 - 4 \cdot 90 \cdot 15}\ \text{см} = \sqrt{2700}\ \text{см} \approx 52\ \text{см}.$$

Пункт 2. Увеличение в положении A. Поперечное увеличение тонкой линзы равно отношению расстояний до изображения и до предмета:

$$\Gamma_A = \frac{L - d_A}{d_A} = \frac{d_B}{d_A} = \frac{70{,}98}{19{,}02} = 3{,}73 \approx 3{,}7.$$

Изображение перевёрнутое и увеличенное (рис. 2): высота $h_A = \Gamma_A h_0 = 18{,}7$ см.

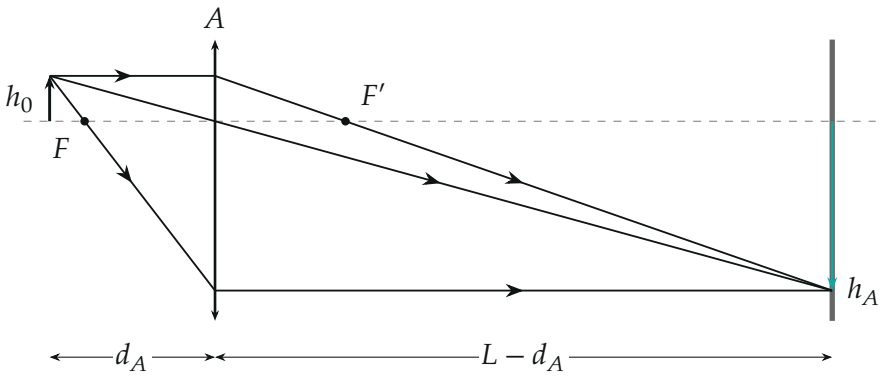


Рис. 2. Положение A: линза близко к предмету, изображение на экране увеличенное и перевёрнутое. Три луча из верхней точки предмета сходятся на экране

Пункт 3. Высота изображения в положении B. Теперь расстояния поменялись местами: до предмета d_B, до экрана $L - d_B = d_A$. Увеличение

$$\Gamma_B = \frac{d_A}{d_B} = \frac{1}{\Gamma_A} = 0{,}268, \qquad h_B = \Gamma_B h_0 = 0{,}268 \cdot 5{,}0 \text{ см} = 1{,}34 \text{ см}.$$

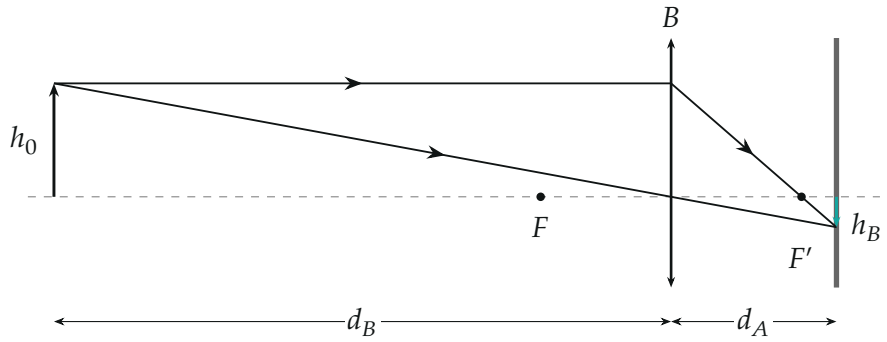


Рис. 3. Положение B: линза близко к экрану, изображение уменьшенное и перевёрнутое

Обратите внимание. Высоты изображений в двух положениях связаны так: $h_A h_B = h_0^2$, потому что $\Gamma_A \Gamma_B = 1$. Проверка: $18{,}66 \cdot 1{,}34 = 25{,}0 = 5{,}0^2$ см^2. Это и есть классический способ измерить высоту предмета, не подходя к нему.

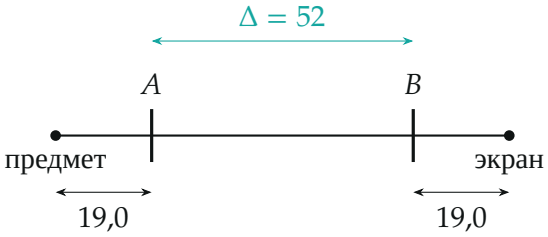


Рис. 4. Положения A и B симметричны относительно середины отрезка «предмет–экран» (размеры в см)

Проверка. Размерность $\sqrt{L^2 - 4Lf}$ — см. Предел: при $L \to 4f$ корни сливаются в $d = 2f$, $\Delta \to 0$, $\Gamma = 1$ — известный случай «$2f$–$2f$». Формула линзы в положении A: $\frac{1}{19{,}02} + \frac{1}{70{,}98} = 0{,}0526 + 0{,}0141 = 0{,}0667 = \frac{1}{15}$ см$^{-1}$ — верно.

Смысл: при заданном расстоянии «предмет–экран» резкое изображение бывает в двух симметричных положениях линзы, и увеличения в них взаимно обратны.

Ответ. 1) $\Delta = \sqrt{L^2 - 4Lf} \approx 52$ см; 2) $\Gamma_A \approx 3{,}7$; 3) $h_B = h_0 \dfrac{d_A}{d_B} \approx 1{,}34$ см.