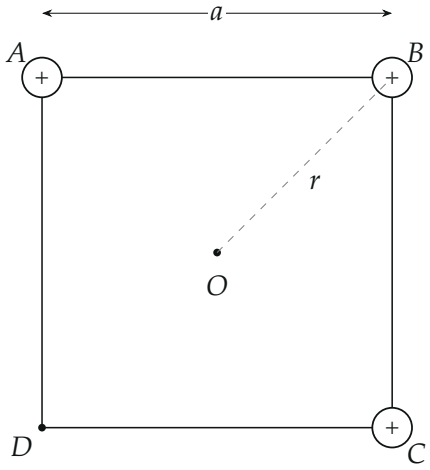
Квадрат из зарядов

Задача 4. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 11 класс, задача 4] «Квадрат из зарядов».

В вакууме в вершинах A, B и C квадрата $ABCD$ со стороной $a = 40{,}0$ см расположены три одинаковых точечных заряда $q = +3{,}0$ мкКл. Потенциал на бесконечности принят равным нулю. Действием силы тяжести можно пренебречь. Коэффициент в законе Кулона равен $k = 9{,}0 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2.

1. Найдите модуль напряжённости электрического поля $|\vec{E}_O|$ в центре O квадрата. Ответ выразите в кВ/м, округлив до десятых долей.
2. В центр квадрата помещают точечный заряд $q_0 = +1{,}2$ мкКл. Определите модуль силы, действующей на этот заряд. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей.
3. Какой заряд q_D нужно поместить в вершину D, чтобы потенциал в центре квадрата стал равен $\varphi_O = 477$ кВ? Вклад собственного поля заряда q_0 в потенциал не учитывайте. Ответ выразите в мкКл, округлив до сотых долей.
4. Чему будет равна потенциальная энергия U_O взаимодействия заряда q_0 со всеми зарядами в вершинах квадрата после добавления заряда q_D? Ответ выразите в Дж, округлив до сотых долей.



Поясняющий рисунок: заряды q в вершинах A, B, C квадрата; O — центр, $r = a/\sqrt{2}$ — расстояние от вершины до центра

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на принцип суперпозиции. Напряжённость — вектор, поэтому поля зарядов в центре складываем как векторы, и симметрия сразу гасит поля противоположных вершин. Потенциал — скаляр, вклады всех зарядов просто складываются со знаками. Все вершины удалены от центра на одно расстояние r, так что каждый заряд q даёт в центре одинаковые по модулю поле и потенциал.

Обозначения. $r = a/\sqrt{2}$ — расстояние от вершины до центра; $E_1 = kq/r^2$ и $\varphi_1 = kq/r$ — модуль поля и потенциал одного заряда q в точке O.

1. Расстояние и вклад одного заряда.

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}400}{1{,}414}\ \text{м} = 0{,}283\ \text{м}, \qquad r^2 = \frac{a^2}{2} = 0{,}080\ \text{м}^2,$$

$$E_1 = \frac{kq}{r^2} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-6}}{0{,}080}\ \frac{\text{В}}{\text{м}} = 3{,}375 \cdot 10^5\ \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$\varphi_1 = \frac{kq}{r} = 9{,}55 \cdot 10^4\ \text{В}.$$

2. Поле в центре: принцип суперпозиции $\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$. Поле положительного заряда направлено от него. Заряды A и C стоят на одной диагонали по разные стороны от O на одном расстоянии — их поля в O равны по модулю и противоположны: $\vec{E}_A + \vec{E}_C = 0$. Остаётся поле заряда B, направленное от B к D:

$$|\vec{E}_O| = E_1 = \frac{2kq}{a^2} = 3{,}375 \cdot 10^5\ \text{В/м} = 337{,}5\ \text{кВ/м}.$$

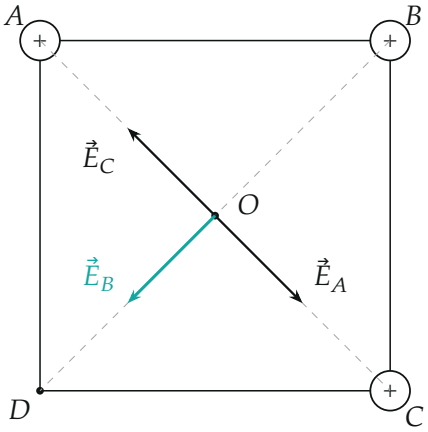


Рис. 1. Поля зарядов в центре: $\vec{E}_A$ и $\vec{E}_C$ равны по модулю и противоположны, остаётся $\vec{E}_O = \vec{E}_B$ — вдоль диагонали BD к вершине D

3. Сила на заряд q_0. По определению напряжённости $\vec{F} = q_0\vec{E}_O$; заряд q_0 положителен, сила направлена так же, как поле, к вершине D:

$$F = q_0 E_O = 1{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}375 \cdot 10^5 \text{ Н} = 0{,}405 \text{ Н} \approx 0{,}41 \text{ Н}.$$

Второй способ — закон Кулона и суперпозиция сил: силы от A и C компенсируются, остаётся $F = \dfrac{kqq_0}{r^2}$ — то же число.

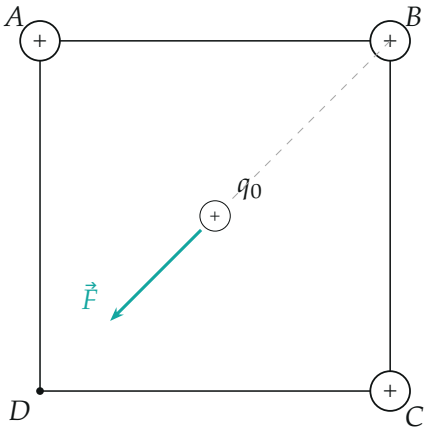


Рис. 2. Сила на положительный заряд q_0 в центре: $\vec{F} = q_0\vec{E}_O$, от B к D

4. Заряд q_D: суперпозиция потенциалов. Потенциал в O от четырёх зарядов, все на расстоянии r (заряд q_0 по условию не учитываем):

$$\varphi_O = \frac{3kq}{r} + \frac{kq_D}{r} \quad \Longrightarrow \quad q_D = \frac{\varphi_O r}{k} - 3q.$$

Подставим: $\dfrac{\varphi_O r}{k} = \dfrac{4{,}77 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2828}{9{,}0 \cdot 10^9}$ Кл $= 14{,}99$ мкКл, и

$$q_D = 14{,}99 - 9{,}00 = 5{,}99 \text{ мкКл}.$$

Три заряда q дают $3\varphi_1 = 286{,}4$ кВ, недостающие 190,6 кВ даёт $q_D > 0$.

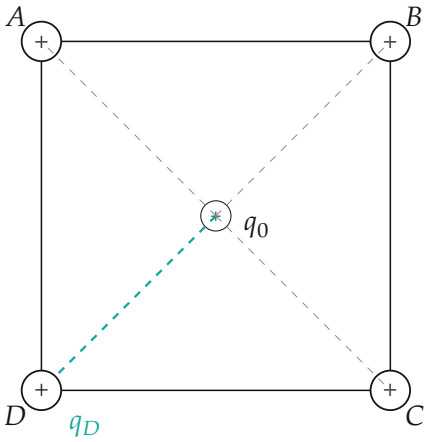


Рис. 3. После добавления q_D: потенциал в O — сумма вкладов четырёх зарядов, все на одинаковом расстоянии r

5. Энергия заряда q_0. Потенциальная энергия взаимодействия точечного заряда с остальными зарядами равна его заряду, умноженному на потенциал, который они создают в его точке:

$$U_O = q_0\varphi_O = 1{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}77 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 0{,}572 \text{ Дж} \approx 0{,}57 \text{ Дж}.$$

Именно поэтому в п. 3 потенциал задан без вклада самого q_0.

Обратите внимание. Поля складываются как векторы и три заряда дают поле одного, а потенциалы — как числа, и три заряда дают утроенный потенциал.

Проверка. Размерности: $[kq/r^2]$ = Н/Кл = В/м, $[\varphi r/k]$ = Кл, $[q_0\varphi]$ = Дж. Предел: если $q_D = q$, потенциал в центре был бы $4\varphi_1 = 381{,}8$ кВ < 477 кВ, поэтому $q_D > q$ — согласуется с $5{,}99 > 3{,}0$ мкКл.

Смысл: симметрия гасит поля пар противоположных вершин, а потенциал от симметрии не гасится — он только копится.

Ответ. 1) $E_O = \dfrac{2kq}{a^2} = 337{,}5$ кВ/м; 2) $F = q_0E_O \approx 0{,}41$ Н; 3) $q_D = \dfrac{\varphi_O a}{\sqrt{2}\,k} - 3q \approx +5{,}99$ мкКл; 4) $U_O = q_0\varphi_O \approx 0{,}57$ Дж.