Линза и пластинка

Задача 5. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 11 класс, задача 5] «Линза и пластинка».

Небольшой протяжённый предмет расположен вблизи главной оптической оси тонкой собирающей линзы и перпендикулярен ей. Расстояние от предмета до линзы составляет $s = 30{,}0$ см. Фокусное расстояние линзы равно $f = 12{,}0$ см. При решении задачи считайте все лучи параксиальными.

1. Найдите расстояние между изображением и линзой. Ответ выразите в сантиметрах, округлив до десятых долей.
2. Найдите поперечное увеличение. Ответ округлите до десятых долей.
3. Вплотную к линзе устанавливают плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $b = 3{,}0$ см с показателем преломления $n = 1{,}50$, так что пластина находится между линзой и изображением. Поверхности пластины перпендикулярны оптической оси линзы. Найдите расстояние от изображения, полученного в этой оптической системе, до линзы. Ответ выразите в сантиметрах, округлив до сотых долей.
4. В этой конфигурации найдите поперечное увеличение. Ответ округлите до сотых долей.
5. Пластину отодвигают от линзы на расстояние $d = 5{,}0$ см, оставляя её на стороне изображения (между линзой и изображением). Найдите новое расстояние между полученным в системе изображением и линзой. Ответ выразите в сантиметрах, округлив до десятых долей.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тонкую линзу и плоскую пластину в сходящемся пучке. Без пластины работает формула тонкой линзы. Пластина не фокусирует: в стекле луч только идёт под меньшим углом к оси, а на выходе возвращается к прежнему наклону. Поэтому пучок сходится в точке, сдвинутой вдоль оси на одну и ту же величину Δ для всех лучей, — изображение отодвигается, но его размер не меняется.

Обозначения. f' — расстояние от линзы до изображения без пластины; Γ — поперечное увеличение; θ — малый угол луча с осью в воздухе, θ' — в стекле; Δ — сдвиг изображения пластиной. Ось x — по главной оптической оси от линзы к изображению.

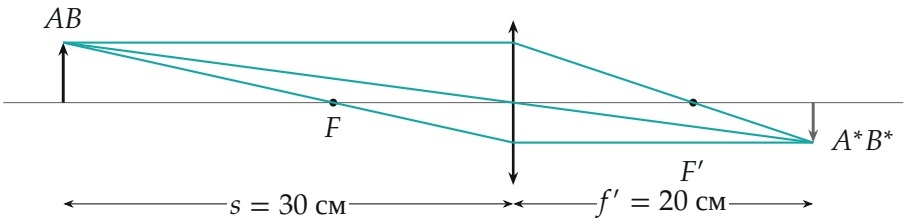

Рис. 1. Построение изображения без пластины (по вычисленным точкам, масштаб 1 : 5): три луча из верхней точки предмета сходятся на расстоянии $f' = 20$ см, изображение перевёрнуто и уменьшено

1. Изображение без пластины: формула тонкой линзы для действительного предмета и изображения:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{f} \quad\Longrightarrow\quad f'=\frac{sf}{s-f}=\frac{30\cdot 12}{18}\ \text{см}=20{,}0\ \text{см}.$$

2. Увеличение — отношение размера изображения к размеру предмета; из подобия треугольников, образованных центральным лучом (рис. 1),

$$|\Gamma|=\frac{f'}{s}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67\approx 0{,}7.$$

Изображение действительное, перевёрнутое, уменьшенное.

3. Сдвиг изображения пластиной. Возьмём луч, сходящийся к оси под малым углом θ. На входе в пластину по закону преломления в параксиальном приближении $\sin\theta = n\sin\theta'$, то есть $\theta' = \theta/n$. В стекле на толщине b луч приближается к оси на $b\theta' = b\theta/n$, а без пластины приблизился бы на $b\theta$. Значит, на выходе он дальше от оси на $b\theta(1-1/n)$ и, выйдя под прежним углом θ, догоняет прежний луч на расстоянии

$$\Delta=\frac{b\theta(1-1/n)}{\theta}=b\left(1-\frac{1}{n}\right)=3{,}0\cdot\left(1-\frac{1}{1{,}5}\right)\ \text{см}=1{,}0\ \text{см}.$$

θ сократилось — сдвиг одинаков для всех параксиальных лучей, пучок по-прежнему сходится в точку. Изображение на расстоянии

$$f_1' = f' + \Delta = 20{,}0 + 1{,}0 = 21{,}00 \text{ см}.$$

Пластина целиком лежит до изображения ($3 < 20$), поэтому формула применима.

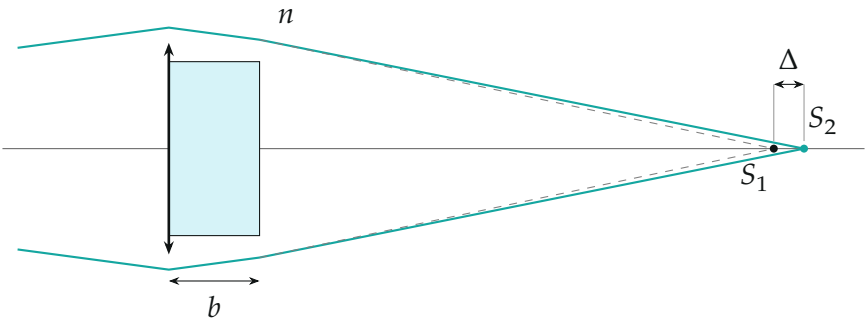

Рис. 2. Сходящийся пучок и пластина вплотную к линзе (продольный масштаб $1:2{,}5$*, поперечный растянут): в стекле лучи идут положе, точка схода сдвигается из* S_1 *в* S_2 *на* Δ

4. Увеличение с пластиной. Рассмотрим верхнюю точку изображения. Луч, который после линзы идёт параллельно оси (он вышел из верхней точки предмета через передний фокус), падает на пластину перпендикулярно и проходит её без преломления — высота точки схода не меняется. Пластина сдвигает изображение только вдоль оси на Δ, поэтому

$$|\Gamma_1| = |\Gamma| = \frac{2}{3} \approx 0{,}67.$$

Сверка центральным лучом (рис. 3): от центра линзы с наклоном $\theta = 4/30$ (для предмета высотой 4 см) он в стекле опускается на $3 \cdot \theta/1{,}5 = 0{,}27$ см, а затем на высоту $-2{,}67$ см выходит при $x = 3 + (2{,}67 - 0{,}27)/\theta = 21$ см — в ту же точку.

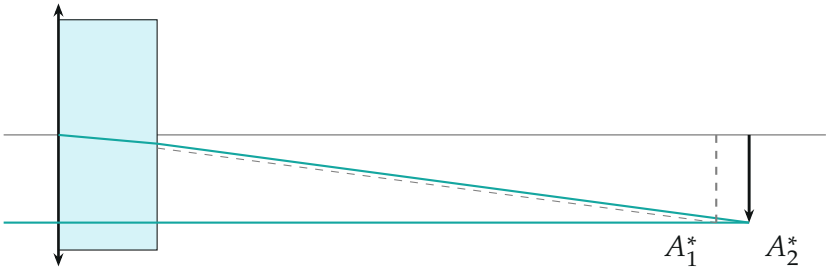

Рис. 3. Верхняя точка изображения: нижний луч — параллельный оси, верхний — через центр линзы. Луч, параллельный оси, проходит пластину без преломления (высота не меняется), центральный луч сдвигается так же, как осевые, — изображение $A_1^* \to A_2^*$ сдвинулось на 1 см, а его высота та же

5. Пластина на расстоянии d. В выводе п. 3 положение пластины не входило: важны только толщина b и то, что весь путь в стекле лежит между линзой и точкой схода ($d + b = 8 < 20$ см). Сдвиг тот же:

$$f_2' = f' + b\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 21{,}0 \text{ см}.$$

Расчёт по рис. 4 для луча, прошедшего линзу на высоте 4 см: у пластины он на высоте $4 \cdot (1 - 5/20) = 3{,}0$ см, на выходе — $3{,}0 - 3 \cdot \dfrac{4/20}{1{,}5} = 2{,}6$ см, и сходится к оси при $x = 8 + 2{,}6 \cdot 20/4 = 21{,}0$ см.

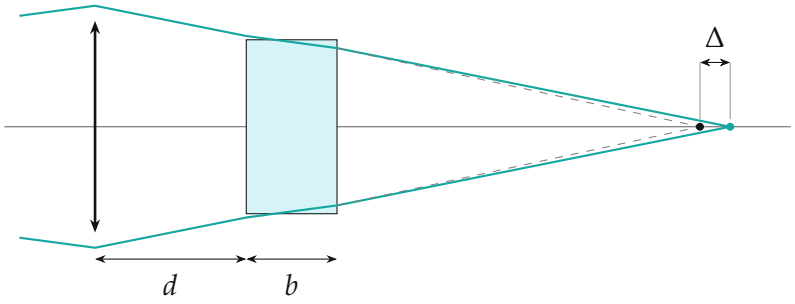

Рис. 4. Пластина отодвинута на $d = 5$ см: лучи входят в неё ближе к оси, но сдвиг точки схода тот же $\Delta = 1$ см

Обратите внимание. Пластина в сходящемся пучке сдвигает изображение *от* линзы и не меняет его размер; сдвиг не зависит от того, где стоит пластина, лишь бы она была до точки схода.

Проверка. Размерность $\Delta = b(1 - 1/n)$ — длина. Пределы: $n = 1$ (стекло как воздух) даёт $\Delta = 0$; $n \to \infty$ даёт $\Delta \to b$ — в «бесконечно плотной» пластине луч идёт параллельно оси, и её толщина просто вставляется в путь. Формула линзы: $1/30 + 1/20 = 1/12$ — верно.

Смысл: плоская пластина — не линза, она лишь удлиняет путь пучка на $b(1 - 1/n)$.

Ответ. 1) $f' = \dfrac{sf}{s - f} = 20{,}0$ см; 2) $|\Gamma| = \dfrac{f'}{s} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}7$ (изображение перевёрнутое); 3) $f' + b\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 21{,}00$ см; 4) $|\Gamma| = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$; 5) 21,0 см.