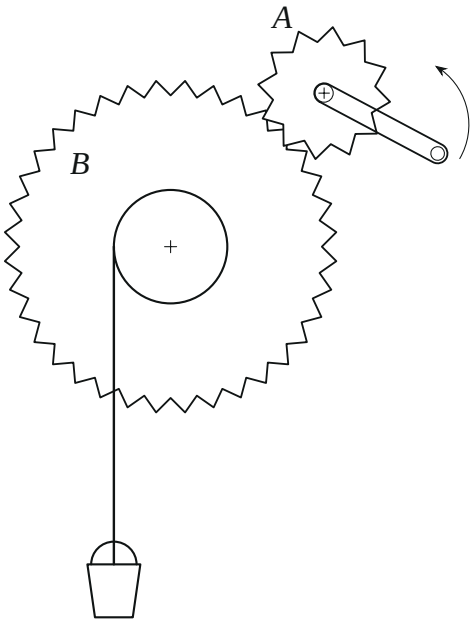
Шестерёнчатая лебёдка

Задача 3. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 7 класс, задача 3] «Шестерёнчатая лебёдка».

Из колодца глубиной $H = 9$ м поднимают ведро с помощью лебёдки. Лебёдка состоит из барабана, на который наматывается верёвка (см. рисунок). На одной оси с барабаном жёстко закреплено большое зубчатое колесо B с числом зубьев $z_B = 36$. С ним напрямую зацеплено малое колесо A с числом зубьев $z_A = 12$; к колесу A присоединена ручка. За один полный оборот барабана на него наматывается верёвка длиной $\ell = 1{,}50$ м. Ручку вращают равномерно, один оборот ручки занимает 2 секунды.

К свободному концу верёвки подвешено пустое ведро массой 1,0 кг и вместимостью 12 л. Когда ведро начинают поднимать, оно заполнено водой на 75 %. Масса 1 л воды равна 1 кг.



1. Определите массу ведра с водой. Ответ выразите в килограммах, округлив до целого числа.

2. Сколько оборотов ручки нужно совершить, чтобы ведро поднялось от уровня воды в колодце до края колодца? Ответ выразите в оборотах, округлив до целого числа.
3. Сколько времени займёт подъём? Ответ выразите в секундах, округлив до целого числа.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на передачу вращения зубчатыми колёсами. Ручка вращает малое колесо A, оно — большое колесо B, а B сидит на одной оси с барабаном, поэтому барабан делает столько же оборотов, сколько B. Колёса сцеплены зубьями: сколько зубьев прошло через точку зацепления у одного колеса, столько же и у другого. Отсюда число оборотов обратно пропорционально числу зубьев. Каждый оборот барабана поднимает ведро на ℓ.

Обозначения. $m_0 = 1{,}0$ кг — масса пустого ведра, $V_0 = 12$ л — вместимость, $f = 0{,}75$ — доля заполнения; N_A, N_B — числа оборотов колёс A и B (и ручки, и барабана); $\tau = 2$ с — время одного оборота ручки; t — время подъёма.

Пункт 1. Масса ведра с водой. В ведре $fV_0 = 0{,}75 \cdot 12 = 9$ л воды, это 9 кг (литр воды — килограмм). Масса ведра с водой — сумма масс ведра и воды:

$$m = m_0 + fV_0 \cdot 1\ \tfrac{\text{кг}}{\text{л}} = 1{,}0 + 9 = 10\ \text{кг}.$$

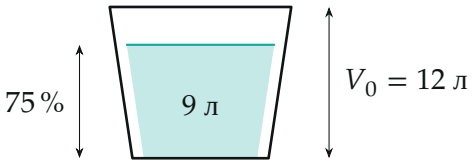


Рис. 1. Ведро заполнено на 75 %: в нём 9 л = 9 кг воды

Пункт 2. Число оборотов ручки. Шаг 1 — обороты барабана. За один оборот барабана наматывается $\ell = 1{,}5$ м верёвки, и ведро поднимается на ℓ (рис. 2). Подъём на H требует

$$N_B = \frac{H}{\ell} = \frac{9}{1{,}5} = 6 \text{ оборотов}.$$

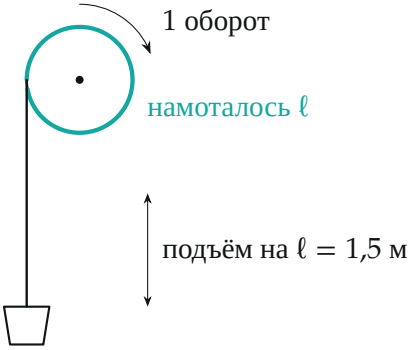


Рис. 2. За один оборот барабана на него наматывается ℓ верёвки — ведро поднимается на ℓ

Шаг 2 — передача $A \to B$. Колёса сцеплены: за то время, пока B делает один оборот, через точку зацепления проходят все его $z_B = 36$ зубьев, и столько же зубьев колеса A, то есть $36/12 = 3$ его оборота (рис. 3). Ручка закреплена на колесе A и вращается вместе с ним:

$$z_A N_A = z_B N_B \quad \Rightarrow \quad N_A = \frac{z_B}{z_A} N_B = \frac{36}{12} \cdot 6 = 18 \text{ оборотов}.$$

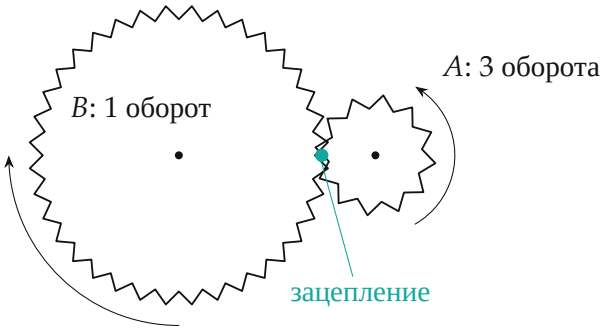


Рис. 3. Через точку зацепления проходит одинаковое число зубьев обоих колёс: пока B делает 1 оборот (36 зубьев), A делает 36/12 = 3 оборота

Пункт 3. Время подъёма. Ручку вращают равномерно, оборот — за $\tau = 2$ с:

$$t = N_A \tau = 18 \cdot 2 \text{ с} = 36 \text{ с}.$$

Ведро поднимается равномерно со скоростью $v = H/t = 9/36 = 0{,}25$ м/с; высота подъёма растёт линейно с числом оборотов ручки: $\ell/3 = 0{,}5$ м на оборот (рис. 4).

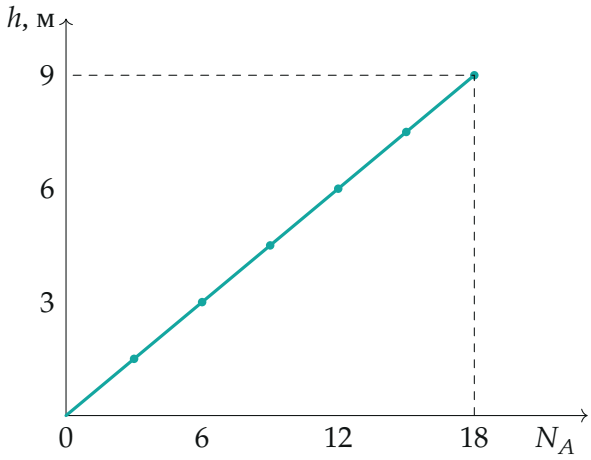


Рис. 4. Высота подъёма ведра от числа оборотов ручки: каждые 3 оборота ручки — оборот барабана, 1,5 м

Обратите внимание. Масса ведра с водой (пункт 1) на число оборотов и время не влияет: она понадобилась бы для силы на ручке, а здесь спрашивают только кинематику. И колесо A (с ручкой) малое — значит, оно вращается *быстрее* барабана: делить 36 на 12, а не наоборот.

Проверка. Размерности: м/м — безразмерное число оборотов, оборот·с/оборот = с. Второй способ: за один оборот ручки барабан поворачивается на $1/3$ оборота и наматывает $1{,}5/3 = 0{,}5$ м; $9/0{,}5 = 18$ оборотов — совпадает.

Смысл: малое колесо делает больше оборотов, чем большое, во столько раз, во сколько у него меньше зубьев; барабан переводит обороты в метры верёвки.

Ответ. 1) $m = 10$ кг; 2) $N_A = 18$ оборотов; 3) $t = 36$ с.